
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

EUGENIO GIUSEPPE. TOGLIATTI

Una configurazione notevole di “reticoli, sopra una superficie dello spazio ordinario

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 7 (1928), n.1, p. 18–24.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_1_18_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_1_18_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_1_18_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Una configurazione notevole di “ reticoli „ sopra una superficie dello spazio ordinario.

Nota di EUGENIO G. TOGLIATTI (a Genova).

1. Sia data, nello spazio ordinario, una superficie generica B' in coordinate asintotiche u, v :

$$(1) \quad x^{(i)} = x^{(i)}(u, v) \quad (i=0, 1, 2, 3).$$

(1) SUBIRANI, *Elementi di Geometria differenziale*, pag. 151.

Le coordinate proiettive omogenee $x^{(n)}$ d'un punto di F siano normalizzate al modo di WILCZYNSKI ⁽¹⁾; esse saranno perciò quattro soluzioni linearmente indipendenti d'un sistema di equazioni alle derivate parziali del 2° ordine del tipo:

$$(2) \quad x_{uu} + 2bx_u + fx = 0, \quad x_{vv} + 2a'x_v + gx = 0.$$

Gli indici u, v indicano derivazioni; i coefficienti a', b, f, g sono legati fra loro da tre relazioni, condizioni d'integrabilità del sistema (2), che non occorre qui trascrivere ⁽²⁾.

Un'equazione differenziale:

$$du^2 - \varphi(uv)dv^2 = 0$$

definisce su F un sistema doppio coniugato S_1 di linee, o « reticolo » ⁽³⁾. Le linee del reticolo sono le linee integrali delle due equazioni $du \mp \lambda dv = 0$, ove $\lambda = \sqrt{\varphi}$; perciò, detti $\varphi(uv)$, $\tau(uv)$ due integrali rispettivamente di tali equazioni, esse si potranno rappresentare ponendo $\varphi = \text{cost.}$, $\tau = \text{cost.}$ Le linee di S_1 sono *caratteristiche* ⁽⁴⁾ dell'equazione, combinazione lineare delle (2):

$$\lambda^2 x_{uu} - x_{vv} - 2a'x_u + 2b\lambda^2 x_v + (\lambda^2 f - g)x = 0;$$

assumendole perciò come nuove linee coordinate su F , l'equazione trasformata della precedente non deve contenere $x_{\varphi\varphi}$, $x_{\tau\tau}$ ⁽⁴⁾. Facendo il cambiamento di variabili, e badando che:

$$\lambda \varphi_u + \varphi_v = 0, \quad -\lambda \sigma_u + \sigma_v = 0;$$

e quindi anche:

$$\begin{aligned} \varphi_{vv} &= -\lambda \varphi_{uv} - \lambda_v \varphi_u = \lambda^2 \varphi_{uu} + (\lambda \lambda_u - \lambda_v) \varphi_u, \\ \sigma_{vv} &= \lambda \sigma_{uv} + \lambda_v \sigma_u = \lambda^2 \sigma_{uu} + (\lambda \lambda_u + \lambda_v) \sigma_u; \end{aligned}$$

si trova infatti, come equazione trasformata, la seguente:

$$\begin{aligned} x_{\varphi\varphi} + \frac{\lambda_v - \lambda \lambda_u - 2a' - 2b\lambda^3}{4\lambda^2 \varphi_u} x_{\varphi} + \frac{-\lambda_v - \lambda \lambda_u - 2a' + 2b\lambda^3}{4\lambda^2 \varphi_u} x_{\tau} + \\ + \frac{\lambda^2 f - g}{4\lambda^2 \varphi_u} x = 0. \end{aligned}$$

⁽¹⁾ WILCZYNSKI, *Projective Differential Geometry of Curved Surfaces*, I. « Trans. Amer. Math. Soc. », 8, 1907, pp. 233-260.

⁽²⁾ Adoperando le coordinate normali del FUBINI (v. per es.: FUBINI-CRCH, *Geometria proiettiva differenziale*, § 16) i pochi calcoli che qui occorrono sarebbero riusciti alquanto più complicati.

⁽³⁾ Adottiamo questa locuzione in luogo dell'altra, molto usata, di « reti », perchè quest'ultima parola ha già il suo significato in altre parti della geometria.

⁽⁴⁾ DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, I, 2 éd., p. 193.

Applicando a questa la ben nota trasformazione di LAPLACE e DARBOUX, si deducono dal punto generico x di F due nuovi punti M, M' , situati nel piano tangente ad F in x , ed aventi rispettivamente le coordinate:

$$x_\sigma + \frac{\lambda_v - \lambda\lambda_u - 2a' - 2b\lambda^3}{4\lambda^2\sigma_u} x, \quad x_\rho + \frac{-\lambda_v - \lambda\lambda_u - 2a' + 2b\lambda^3}{4\lambda^2\zeta_u} x.$$

D'altra parte si ha:

$$x_u = x_\rho\zeta_u + x_\sigma\sigma_u, \quad x_v = -\lambda x_\rho\zeta_u + \lambda x_\sigma\sigma_u;$$

e quindi:

$$x_\sigma = \frac{1}{2\sigma_u} \left(x_u + \frac{1}{\lambda} x_v \right), \quad x_\rho = \frac{1}{2\zeta_u} \left(x_u - \frac{1}{\lambda} x_v \right);$$

perciò come coordinate omogenee di M, M' si possono prendere rispettivamente:

$$\begin{aligned} &[(\lambda_v - 2b\lambda^3) - (\lambda\lambda_u + 2a')]x + 2\lambda^2x_u + 2\lambda x_v, \\ &[-(\lambda_v - 2b\lambda^3) - (\lambda\lambda_u + 2a')]x + 2\lambda^2x_u - 2\lambda x_v. \end{aligned}$$

E riferendo i punti del piano tangente ad F in x ad x, x_u, x_v come punti fondamentali, le coordinate di M, M' entro tale piano vengono ad essere:

$$\begin{aligned} (3) \quad &\text{per } M: \quad (\lambda_v - 2b\lambda^3) - (\lambda\lambda_u + 2a'), \quad 2\lambda^2, \quad 2\lambda; \\ &\text{per } M': \quad -(\lambda_v - 2b\lambda^3) - (\lambda\lambda_u + 2a'), \quad 2\lambda^2, \quad -2\lambda. \end{aligned}$$

2. Si consideri ora su F un secondo reticolo S_2 :

$$du^2 - \psi(uv)dv^2 = 0;$$

ponendo $\mu = \sqrt{\psi}$, si trovano analogamente, nel piano tangente ad F in x , i punti:

$$\begin{aligned} (4) \quad &N: \quad (\mu_v - 2b\mu^3) - (\mu\mu_u + 2a'), \quad 2\mu^2, \quad 2\mu; \\ &N': \quad -(\mu_v - 2b\mu^3) - (\mu\mu_u + 2a'), \quad 2\mu^2, \quad -2\mu. \end{aligned}$$

Pensando $M, M'; N, N'$ come due coppie di vertici opposti di un quadrilatero completo, se ne deducono con costruzioni lineari i due ulteriori vertici opposti P, P' , come intersezioni per es. delle coppie di rette $MN, M'N'; MN', M'N$ rispettivamente. Ponendo per

un momento:

$$x = \lambda \lambda_u + 2a', \quad y = \lambda_v - 2b\lambda^3; \quad \gamma = \mu \mu_v + 2a', \quad \delta = \mu_v - 2b\mu^3.$$

un facile calcolo fa trovare le seguenti coordinate per P, P' :

$$(5) \quad \begin{aligned} P: & (\lambda\delta - \mu^2\gamma)(\lambda^2\delta - \mu^2\gamma) - (\lambda\gamma - \mu x)(\lambda^2\gamma - \mu^2x), \\ & - 2\lambda\mu(\lambda - \mu)(\lambda^2\gamma - \mu^2x), \quad - 2\lambda\mu(\lambda - \mu)(\lambda\delta - \mu^2\gamma); \\ P': & (\lambda\gamma + \mu x)(\lambda^2\gamma - \mu^2x) - (\lambda\delta - \mu^2\gamma)(\lambda^2\delta + \mu^2\gamma), \\ & - 2\lambda\mu(\lambda + \mu)(\lambda^2\gamma - \mu^2x), \quad - 2\lambda\mu(\lambda + \mu)(\lambda\delta - \mu^2\gamma). \end{aligned}$$

Ora, è ben noto dalla geometria proiettiva elementare che le tre coppie di rette che proiettano da x le tre coppie di vertici opposti $M, M'; N, N'; P, P'$ del quadrilatero completo appartengono ad una stessa involuzione: la quale non sarà altro che l'involuzione delle tangenti coniugate di F nel punto x , avendo in comune con essa le due coppie $xM, xM'; xN, xN'$. Ne segue che anche le rette xP, xP' saranno tangenti coniugate di F in x . Ripetendo questa costruzione per ogni punto di E , si viene a costruire un terzo reticolo S_3 :

$$du^2 - \gamma(uv)dv^2 = 0;$$

ove:

$$(6) \quad v = \lambda \gamma = - \frac{\lambda^2\gamma - \mu^2x}{\lambda\delta - \mu^2\gamma} = - \frac{\lambda^2(\mu\mu_v + 2a') - \mu^2(\lambda\lambda_u + 2a')}{\lambda(\mu_v - 2b\mu^3) - \mu(\lambda_u - 2b\lambda^3)}.$$

3. Si possono scegliere λ, μ in modo che P, P' siano proprio i due trasformati di LAPLACE del punto x per il reticolo S_3 ? A tale scopo, le espressioni (5) dovranno esser proporzionali rispettivamente a queste altre, analoghe alle (3), (4):

$$\begin{aligned} P: & (\mu_v - 2b\mu^3) - (\mu\mu_u + 2a'), \quad \mu^2, \quad -2\mu; \\ P': & (\mu_v - 2b\mu^3) - (\mu\mu_u + 2a'), \quad \mu^2, \quad -2\mu; \end{aligned}$$

(Lo scambiare qui P con P' porta solo a cambiare il segno di μ). Si trovano così, oltre la (6), le due condizioni:

$$\frac{\lambda\mu(\lambda - \mu)}{\mu} = \frac{(\lambda^2\delta - \mu^2\gamma) + \mu(\lambda\gamma - \mu x)}{(\mu_v - 2b\mu^3) - (\mu\mu_u + 2a')}, \quad \frac{\lambda\mu(\lambda + \mu)}{\mu} = \frac{(\lambda^2\delta + \mu^2\gamma) + \mu(\lambda\gamma + \mu x)}{(\mu_v - 2b\mu^3) + (\mu\mu_u + 2a')},$$

cioè, riducendo a forma intera, poi sommando e sottraendo, e dividendo rispettivamente per λ, μ :

$$\begin{aligned} \mu(\lambda\delta + \mu\gamma) &= \lambda\mu(\mu_v - 2b\mu^3) + \mu^2(\mu\mu_u + 2a'), \\ \mu(\lambda\gamma + \mu x) &= \lambda^2(\mu\mu_u + 2a') + \lambda\mu(\mu_v - 2b\mu^3). \end{aligned}$$

Infine, dopo semplici trasformazioni, le tre condizioni trovate diventano:

$$(7) \quad \begin{aligned} 2(\lambda^2 - \mu^2)(a' + b\lambda\mu\nu) &= \lambda\mu(\mu\lambda_u - \lambda\mu_u) + \nu(\mu\lambda_v - \lambda\mu_v) \\ 2(\mu^2 - \nu^2)(a' + b\lambda\mu\nu) &= \mu\nu(\nu\mu_u - \mu\nu_u) + \lambda(\nu\mu_v - \mu\nu_v) \\ 2(\nu^2 - \lambda^2)(a' + b\lambda\mu\nu) &= \nu\lambda(\lambda\nu_u - \nu\lambda_u) + \mu(\lambda\nu_v - \nu\lambda_v). \end{aligned}$$

La simmetria di queste formole rispetto a λ, μ, ν prova intanto che la circostanza richiesta si presenterà sempre e solo quando la costruzione indicata, applicata a due *qualunque* delle tre reti, conduce sempre a trovare la terza.

Ma le (7) si possono integrare facilmente. Perciò si cominci col sostituire ad esse le tre che se ne ottengono o sommandole senz'altro, oppure sommandole dopo averle moltiplicate una volta per ν^2, λ^2, μ^2 ed un'altra volta per $\lambda^2\mu^2, \mu^2\nu^2, \nu^2\lambda^2$: si trovano così le equazioni seguenti, delle quali le prime due non contengono a', b :

$$(7') \quad \begin{aligned} (\mu^2 - \nu^2)\lambda\lambda_u + (\nu^2 - \lambda^2)\mu\mu_u + (\lambda^2 - \mu^2)\nu\nu_u &= 0 \\ (\mu^2 - \nu^2)\frac{\lambda_v}{\lambda} + (\nu^2 - \lambda^2)\frac{\mu_v}{\mu} + (\lambda^2 - \mu^2)\frac{\nu_v}{\nu} &= 0 \\ 2(a' + b\lambda\mu\nu)\Sigma\lambda^3\mu^2(\lambda^2 - \mu^2) &= \Sigma\lambda^3\mu^3(\mu\lambda_u - \lambda\mu_u) + \lambda\mu\nu\Sigma\lambda\mu(\mu\lambda_v - \lambda\mu_v). \end{aligned}$$

Introducendo φ, ψ, χ queste equazioni diventano:

$$(7'') \quad \begin{aligned} (\psi - \chi)\varphi_u + (\chi - \varphi)\psi_u + (\varphi - \psi)\chi_u &= 0 \\ \left(\frac{1}{\psi} - \frac{1}{\chi}\right)\left(\frac{1}{\varphi}\right)_v + \left(\frac{1}{\chi} - \frac{1}{\varphi}\right)\left(\frac{1}{\psi}\right)_v + \left(\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\psi}\right)\left(\frac{1}{\chi}\right)_v &= 0 \\ 4(a' + b\sqrt{\varphi\psi\chi})\Sigma\varphi\psi(\varphi - \psi) &= \Sigma\varphi\psi(\psi\varphi_u - \varphi\psi_u) + \sqrt{\varphi\psi\chi}\Sigma(\psi\varphi_v - \varphi\psi_v). \end{aligned}$$

La prima di esse si può anche scrivere:

$$(\varphi - \psi)(\chi - \varphi)_u - (\chi - \varphi)(\varphi - \psi)_u = 0;$$

da cui si ricava:

$$\left(\frac{\chi - \varphi}{\varphi - \psi}\right)_u = 0.$$

Analogamente, la seconda delle (7''), che si deduce dalla prima scambiando φ, ψ, χ, u con $\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\psi}, \frac{1}{\chi}, v$, darà:

$$\left(\frac{1}{\chi} - \frac{1}{\varphi}\right)_v = \left(\frac{\chi - \varphi}{\varphi - \psi} \cdot \frac{\psi}{\chi}\right)_v = 0.$$

Segue che le due quantità $\frac{Z - \varphi}{\varphi - \psi}, \frac{Z - \varphi}{\varphi - \psi} \frac{\psi}{Z}$ sono funzioni rispettivamente solo di v e solo di u ; perciò il loro quoziente $\frac{\psi}{Z}$ sarà il prodotto d'una funzione di u per una di v . Lo stesso può dirsi, analogamente, dei quozienti $\frac{Z}{\varphi}, \frac{\psi}{\psi}$; sicchè, indicando con U_1, U_2, U_3 tre funzioni di u , con V_1, V_2, V_3 tre funzioni di v , e chiamando τ un fattore di proporzionalità, si potrà porre:

$$\varphi = \tau \frac{U_1}{V_1}, \quad \psi = \tau \frac{U_2}{V_2}, \quad Z = \tau \frac{U_3}{V_3}.$$

Sostituendo queste espressioni di φ, ψ, Z nelle due prime equazioni (7'') si trova, dopo facili riduzioni:

$$(8) \quad \Sigma V_1(U_3 U''_2 - U_2 U''_3) = 0, \quad \Sigma U_1(V_3 V''_2 - V_2 V''_3) = 0$$

(qui si possono indicare le derivate con accenti).

Le identità così trovate sono della forma:

$$\Sigma z_i(u) \varphi_i(v) = 0 \quad (i = 1, 2, 3);$$

da cui si trae che o le z_i , o le φ_i , son proporzionali a tre costanti: infatti, se le $z_i(u)$ non fossero proporzionali a tre costanti, dando successivamente ad u due valori generici distinti, si troverebbero tra le $\varphi_i(v)$ due legami lineari distinti a coefficienti costanti, onde le $\varphi_i(v)$ sarebbero esse proporzionali a tre costanti. Del resto, pensando le z_i, φ_i come coordinate omogenee di due punti d'un piano, questi risultano reciproci rispetto ad una conica *non degenera*, qualunque siano u, v ; è allora evidente che uno dei due dev'essere fisso, mentre l'altro può solo descrivere una retta. Quest'osservazione, applicata alle (8), permette di concludere che: o le $U_i(u)$ son proporzionali a tre costanti, oppure $U_i(u) = \varepsilon[a_i U(u) + b_i]$ con le a_i, b_i costanti; ed analogamente che: o le $V_i(v)$ son proporzionali a tre costanti, oppure $V_i(v) = \varepsilon[c_i V(v) + d_i]$ con le c_i, d_i costanti. I primi casi sono inclusi nei secondi, per $U = 0$ o rispettivamente $V = 0$; perciò, ritornando ora alle funzioni φ, ψ, Z , si trova che esse devono avere la forma:

$$(9) \quad \varphi = \tau \frac{a_1 U(u) + b_1}{c_1 V(v) + d_1}, \quad \psi = \tau \frac{a_2 U(u) + b_2}{c_2 V(v) + d_2}, \quad Z = \tau \frac{a_3 U(u) + b_3}{c_3 V(v) + d_3}.$$

Sostituendo di nuovo queste espressioni nelle due prime delle (7'') si trova che le costanti a_i, b_i, c_i, d_i devono annullare i quattro

determinanti: (abc) , (abd) , (acd) , (bcd) ; ciò si ottiene, in ogni caso, prendendo:

$$(10) \quad \begin{aligned} a_i &= z_1 r_i + z_2 s_i, & b_i &= \beta_1 r_i + \beta_2 s_i, \\ c_i &= \gamma_1 r_i + \gamma_2 s_i, & d_i &= \delta_1 r_i + \delta_2 s_i. \end{aligned} \quad (i=1, 2, 3);$$

dove le r_i son tre costanti non tutte nulle, e così pure le s_i ⁽¹⁾.

Sostituendo infine le (9), tenendo conto delle (10), nella terza delle (7''), si determina τ ; e precisamente, dopo aver diviso per: $\tau^3 \sum \frac{(a_1 U + b_1)(a_2 U + b_2)}{(c_1 V + d_1)^2 (c_2 V + d_2)^2} (r_1 s_2 - r_2 s_1)$, si trova per $\sqrt{\tau}$ la seguente equazione algebrica di 3° grado:

$$(11) \quad \begin{aligned} 4A(a'\sqrt{C} + b\sqrt{B} \cdot \sqrt{\tau}) &= (z_1 \beta_2 - z_2 \beta_1) U' \sqrt{C} \cdot \tau - \\ &- (\gamma_1 \delta_2 - \gamma_2 \delta_1) V' \sqrt{B} \cdot \sqrt{\tau}; \end{aligned}$$

ove:

$$\begin{aligned} A &= (z_1 \gamma_2 - z_2 \gamma_1) UV + (z_1 \delta_2 - z_2 \delta_1) U' + (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) V + (\beta_1 \delta_2 - \beta_2 \delta_1), \\ B &= (a_1 U + b_1)(a_2 U + b_2)(a_3 U + b_3), \\ C &= (c_1 V + d_1)(c_2 V + d_2)(c_3 V + d_3). \end{aligned}$$

Riassumendo: *Data, mediante le equazioni (1), (2), una superficie in coordinate asintotiche u, v , affinchè tre reticoli assegnati su di essa:*

$$du^2 - \tau dr^2 = 0, \quad du^2 - \psi dr^2 = 0, \quad du^2 - \gamma dr^2 = 0$$

siano tali che, in ogni punto x della superficie, i trasformati di LAPLACE del punto x mediante i tre reticoli siano le tre coppie di vertici opposti d'un quadrilatero completo, occorre e basta che le funzioni τ, ψ, γ abbiano la forma (9), ove a_i, b_i, c_i, d_i son delle costanti aventi la forma (10) ($z_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i, r_i, s_i$ costanti; le r_i non tutte nulle, e così le s_i), e τ è un fattore di proporzionalità fornito dall'equazione algebrica (11).

In particolare, se la superficie considerata è una quadrica ($a' = b = 0$), il fattore τ , e quindi anche ψ, ψ, γ , diventano quozienti d'una funzione della sola v per una della sola u ; sicchè i tre reticoli sono isotermo-coniugati, e le sei rette che congiungono il punto x coi sei vertici del quadrilatero descrivono altrettante congruenze W .

Genova, ottobre 1927.

(1) Infatti, i quattro gruppi di costanti a_i, b_i, c_i, d_i , dei quali non più di due possono esser costituiti da numeri tutti nulli (se si esclude che i tre reticoli coincidano tutti con un sistema di asintotiche), si possono pensare come coordinate di punti d'una retta, che riesce, in ogni caso, individuata (se τ, ψ, γ sono diverse), e della quale r_i, s_i sono due punti generici.