
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

RENATO TAUCER

Sulla trasformazione assoluta dei simboli di Christoffel in uno spazio curvo a due dimensioni

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 7 (1928), n.1, p. 14–18.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_1_14_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_1_14_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

**Sulla trasformazione assoluta dei simboli di Christoffel
in uno spazio curvo a due dimensioni.**

Nota di RENATO TAUCER (a Trieste).

1. Se x_1 e x_2 sono le coordinate del punto corrente $P(x_1, x_2)$ giacente su una superficie Σ , i simboli di CHRISTOFFEL a tre indici di prima specie vengono a rappresentare, come si sa dalla Geometria differenziale, le espressioni

$$(1) \quad \begin{bmatrix} r & s \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{rt}}{\partial x_s} + \frac{\partial a_{st}}{\partial x_r} - \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_t} \right) \quad r, s, t = 1, 2$$

dove le funzioni a_{ih} sono i coefficienti della quadrica differenziale

$$(2) \quad ds^2 = a_{11}dx_1^2 + 2a_{12}dx_1dx_2 + a_{22}dx_2^2.$$

Questi simboli si potranno porre sotto forma vettoriale in modo molto semplice e piano. È nota infatti l'espressione vettoriale dei coefficienti della (2)

$$(3) \quad a_{ih} = P'_i \times P'_h$$

e da questa segue immediatamente

$$\frac{\partial a_{ih}}{\partial x_j} = P''_{ij} \times P'_h + P'_i \times P''_{hj}$$

Sostituendo allora nella (1) e riducendo si ricava

$$(4) \quad \begin{bmatrix} r & s \\ t \end{bmatrix} = P'_t \times P''_{rs}$$

Per i simboli di seconda specie si ha per definizione

$$(5) \quad \left\{ \begin{matrix} r & s \\ t \end{matrix} \right\} = \sum_i \left[\begin{matrix} r & s \\ i \end{matrix} \right] a^{(it)} \quad i = 1, 2$$

dove con $a^{(it)}$ si indicano i coefficienti reciproci della forma quadratica. Essi nel nostro caso possono venir messi molto facilmente sotto la forma

$$a^{(it)} = (-1)^{i+t} \frac{a_{3-i, 3-t}}{\Delta}$$

dove Δ è il discriminante della quadrica $\Delta = (P'_1 \wedge P'_2)^2$.

Sostituendo queste espressioni nella (5) e tenuto conto della (3) e della (4), otteniamo

$$\left\{ \begin{matrix} r & s \\ t \end{matrix} \right\} = \sum_i \left[\frac{(-1)^{i+t}}{\Delta} P'_i \times P''_{rs} \cdot P'_{3-i} \times P'_{3-t} \right].$$

Questa formula è ancora suscettibile di semplificazione, infatti estraendo dalla sommatoria $\frac{(-1)^t}{\Delta} P''_{rs}$, che non dipende da i , quello che ci rimane sotto il segno di somma rappresenta la diade definita dai vettori P'_{3-i} e P'_i applicata al vettore P'_{3-t} . Onde essendo anche P'_{3-t} indipendente da i la (5) assume la forma

$$(6) \quad \left\{ \begin{matrix} r & s \\ t \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^t}{\Delta} P''_{rs} \times \left[\sum_i (-1)^i H(P'_{3-i}, P'_i) \right] P'_{3-t}.$$

L'omografia $\sum_i (-1)^i H(P'_{3-i}, P'_i)$ è la differenza della diade $H(P'_1, P'_2)$ e la sua coniugata, da cui per cose note si deduce che detta omografia è assiale, ossia

$$\sum_i (-1)^i H(P'_{3-i}, P'_i) = 2VH(P'_1, P'_2) \wedge.$$

Tenendo presente che il doppio del vettore di una diade è definito dal prodotto vettoriale dei due vettori che individuano l'omografia, risulta

$$\sum_i (-1)^i H(P'_{3-i}, P'_i) = (P'_1 \wedge P'_2) \setminus = N \wedge$$

dove con N si indica il vettore $P'_1 \wedge P'_2$, cosicchè il simbolo di CHRISTOFFEL di seconda specie viene ad avere l'espressione

$$\left\{ \begin{matrix} rs \\ t \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^t}{N^2} P''_{rs} \times N \wedge P'_{3-t}$$

che con una trasformazione ovvia si riduce a:

$$(7) \quad \left\{ \begin{matrix} rs \\ t \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^t}{N^2} N \times P'_{3-t} \wedge P''_{rs}.$$

Dalle formule precedenti si nota immediatamente la grande semplicità e snellezza che vengono ad avere le forme vettoriali di quelle espressioni analitiche molto pesanti, per la complessità delle quali CHRISTOFFEL è stato indotto a introdurre i suoi simboli.

Cosicchè possiamo concludere che, limitandoci allo studio dell'ordinaria Geometria differenziale sulle superficie, il calcolo vettoriale ci rende non necessario l'uso sistematico dei simboli di CHRISTOFFEL ⁽¹⁾.

2. Come applicazione dimostreremo, in base alle formule trovate, l'eguaglianza fra l'invariante della forma binaria (2) e la curvatura totale di GAUSS, partendo dalla definizione di simbolo di RIEMANN a 4 indici di prima specie.

Dalla teoria di questi simboli sappiamo che in uno spazio curvo a due dimensioni ne esiste uno solo e precisamente (12, 12), sappiamo inoltre che il rapporto $\frac{(12, 12)}{\Delta}$ è invariante rispetto a una qualsiasi trasformazione di coordinate biunivoca.

Il simbolo di RIEMANN per definizione è dato dall'espressione

$$(12, 12) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right] - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right] + \sum_i \left(\left[\begin{matrix} 12 \\ i \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} 12 \\ i \end{matrix} \right] - \left[\begin{matrix} 11 \\ i \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} 22 \\ i \end{matrix} \right] \right).$$

Per mettere questa espressione in forma vettoriale conviene trasformare dapprima la parentesi sotto il segno di sommatoria.

⁽¹⁾ Le formule (4) e (7) furono ricavate per altra via dal BURALI-FORTI nella sua memoria pubblicata nei « Rend. Circ. Mat. Palermo » T. 33, 1912, formule (2) e (4) pag. 37.

Abbiamo allora per la (4) e la (7)

$$\begin{aligned} \left[\begin{matrix} 12 \\ i \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} 12 \\ i \end{matrix} \right] - \left[\begin{matrix} 11 \\ i \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} 22 \\ i \end{matrix} \right] &= \frac{(-1)^i}{N^2} P'_i \times P''_{12} \cdot N \times P'_{3-i} \wedge P''_{12} - \\ &\quad - \frac{(-1)^i}{N^2} P'_i \times P''_{11} \cdot N \times P'_{3-i} \wedge P''_{22} = \\ &= \frac{(-1)^i}{N^2} N \times P'_{3-i} \wedge (P'_i \times P''_{12} \cdot P''_{12} - P'_i \times P''_{11} \cdot P''_{22}) = \\ &= \frac{(-1)^i}{N^2} N \times P'_{3-i} \wedge [H(P''_{12}, P''_{12}) - H(P''_{11}, P''_{22})] P'_i. \end{aligned}$$

Indicheremo per semplicità con z l'omografia $H(P''_{11}, P''_{22}) - H(P''_{12}, P''_{12})$ ossia

$$(8) \quad z = H(P''_{11}, P''_{22}) - H(P''_{12}, P''_{12})$$

essa è evidentemente un'omografia degenera ed il suo invariante primo è

$$I_1 z = P''_{11} \times P''_{22} - P''_{12}^2.$$

Ciò premesso possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \sum_i \left(\left[\begin{matrix} 12 \\ i \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} 12 \\ i \end{matrix} \right] - \left[\begin{matrix} 11 \\ i \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} 22 \\ i \end{matrix} \right] \right) &= \frac{1}{N^2} N \times P'_2 \wedge z P'_1 - \\ - \frac{1}{N^2} N \times P'_1 \wedge z P'_2 &= - \frac{1}{N^2} N \times (P'_1 \wedge z P'_2 - P'_2 \wedge z P'_1). \end{aligned}$$

Denotando con CKz la ciclica della coniugata di z , l'espressione vettoriale in parentesi per una formula molto notevole di calcolo vettoriale ⁽¹⁾ si può esprimere come segue: $CKz(P'_1 \wedge P'_2)$ cioè $CKzN$, per cui la (9) si presenta nella forma:

$$\sum_i \left(\left[\begin{matrix} 12 \\ i \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} 12 \\ i \end{matrix} \right] - \left[\begin{matrix} 11 \\ i \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} 22 \\ i \end{matrix} \right] \right) = - \frac{1}{N^2} N \times CKzN.$$

Gli operatori omografici C e K sono però commutabili fra di loro, onde abbiamo

$$\sum_i \left(\left[\begin{matrix} 12 \\ i \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} 12 \\ i \end{matrix} \right] - \left[\begin{matrix} 11 \\ i \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} 22 \\ i \end{matrix} \right] \right) = - \frac{1}{N^2} N \times KCzN$$

che in forza del teorema della commutazione, diventa

$$\sum_i \left(\left[\begin{matrix} 12 \\ i \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} 12 \\ i \end{matrix} \right] - \left[\begin{matrix} 11 \\ i \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} 22 \\ i \end{matrix} \right] \right) = - \frac{1}{N^2} N \times CzN.$$

⁽¹⁾ BURALI-FORTI e MARCOLONGO: *Analyse Vectorielle Générale*, I. *Transformations linéaires*, pag. 37.

Definito con ν un vettore unitario normale alla superficie Σ nel punto P , esso è dato evidentemente da:

$$\nu = \frac{N}{\text{mod } N}.$$

Si ottiene allora la formola molto semplice

$$\sum_i \left(\left| \begin{smallmatrix} 12 \\ i \end{smallmatrix} \right|, \left| \begin{smallmatrix} 12 \\ i \end{smallmatrix} \right| \right) - \left| \begin{smallmatrix} 11 \\ i \end{smallmatrix} \right|, \left| \begin{smallmatrix} 22 \\ i \end{smallmatrix} \right| \right) = -\nu \times C_{\Sigma \nu}.$$

Trasformata così la sommatoria, possiamo a considerare la differenza delle derivate $\frac{\partial}{\partial x_2} \left[\begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right] - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right]$. Essa si può ridurre in forma assoluta direttamente; infatti per la (4) è:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left[\begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right] - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right] = \frac{\partial}{\partial x_2} (P'_2 \times P''_{11}) - \frac{\partial}{\partial x_1} (P'_2 \times P''_{12}) = P''_{11} \times P''_{22} - P''_{12}^2$$

che per cose già dette rappresenta l'invariante primo dell'omografia z .

Abbiamo così per il simbolo di RIEMANN l'espressione:

$$(12, 12) = I_1 z - \nu \times C_{\Sigma \nu}$$

e tenendo presente che $C_z = I_1 z - z$ e che $\nu^2 = 1$ risulta la formola semplice

$$(12, 12) = \nu \times z \nu.$$

Posto per z la sua espressione data dalla (8), abbiamo la formola

$$(12, 12) = \nu \times P''_{11} \cdot \nu \times P''_{22} - (\nu \times P''_{12})^2$$

che, divisa per il discriminante della quadrica differenziale, ci dà la ben nota formola della curvatura totale di GAUSS (4).

Con ciò resta dimostrata, come si voleva, l'eguaglianza fra l'invariante della quadrica e la curvatura di GAUSS.

Trieste, giugno 1927.

(4) SUBIRANI, *Elementi di Geometria differenziale*, pag. 151.