Bollettino Unione Matematica Italiana

H. F. Baker

Necrologio di Corrado Segre

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (1927), n.5, p. 276–284.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_5_276_0>

CORRADO SEGRE

(Versione di una commemorazione pubblicata nel « Journal of the London Mathematical Society », vol. I).

La notizia della morte di CORRADO SEGRE (maggio 1924) avrà colpito tutti coloro che s'interessano all'odierna geometria come quella di una dolorosa perdita; si prova però una certa difficoltà nell'esprimere il motivo di tale impressione; era noto lo zelo che Egli manifestava nel corrispondere con giovani geometri; si poteva farsi un'opinione della stima in cui Egli era tenuto da amici e discepoli (cfr. la necrologia del CASTELNUOVO, « Rend. dell'Acc. dei Lincei », 2 novembre 1924) e si era letto ciò che Egli scrisse del REYE, due anni prima della propria morte. Riguardo alla sua opera, il giudizio si basa piuttosto sopra quanto Egli scrisse prima di avere compiuti i venticinque anni, che sulle pubblicazioni da Lui fatte negli altri trentacinque; e in quelle è la straordinaria bellezza e la penetrante perfezione del suo stile che colpisce ancor più che la novità fondamentale dei suoi concetti. Come uomo, lo si pensa sempre animato principalmente dalla devozione al proprio tema; come scrittore, preoccupato sopratutto di guidare il lettore ad un punto eminente da cui tutto può vedersi, ogni cosa nella propria posizione, anche tutti i particolari di una teoria ritenuta dianzi incapace di essere abbracciata nel suo insieme. Tutto ciò è ottenuto dal SEGRE ricorrendo agli spazi superiori e giovandosi della facoltà di comunicare ai lettori la propria convinzione della realtà di questi.

Egli era nato a Saluzzo (città che trovasi circa a un terzo della distanza fra Torino e Nizza) addì 20 agosto 1863. A vent'anni, nel 1883, gli fu conferita dall'Università di Torino la laurea « con lode » in seguito alla presentazione di uno studio, che ora occupa 154 grandi pagine delle « Memorie dell'Accademia di Torino » (vol. 36, 1884), sopra le quadriche negli spazi superiori, con applicazione alla geometria della retta; ma ben presto Egli diede altre prove della sua capacità, pubblicando negli anni 1883-84 non meno di quindici memorie. Fu eletto membro dell'Accademia di Torino nel febbraio 1889. Per trentacinque anni Egli continuò a lavorare su quell'argomento, insieme ai suoi discepoli di Torino; il 30 marzo 1924 presentò una memoria a quell'Accademia, il 27 aprile assistette alla seduta di questo Sodalizio; morì il 18 maggio 1924.

Un elenco probabilmente completo delle sue pubblicazioni sino al 1910, si trova registrato nella preziosa Bibliografia del SOMMERVILLE (St. Andrews, 1911). La cosa più utile che può essere fatta qui è l'indicare ciò che vi è di più caratteristico nei principali suoi lavori.

Lo studio degli assi permanenti di rotazione di un corpo rigido risale almeno agli scienziati francesi del principio del secolo XIX e sopravvive nei nostri programmi elementari, nella teoria delle normali a un sistema di quadriche omofocali, teoria metrica e complicata. SEGRE mostrò (« Rend. di Palermo », 2, 1888) che se, in uno spazio a quattro dimensioni, noi prendiamo tre rette arbitrarie, poi prendiamo gli ∞^3 piani che incontrano queste rette e finalmente le rette in cui questi piani incontrano uno spazio a tre dimensioni arbitrarie, si arriva a un sistema di ∞^3 rette precisamente identico a quello che nasce da un sistema di quadriche omofocali, e inversamente. Pur riconoscendo quanto altri fece riguardo a questo sistema di rette (cfr. per es. pagg. 320-326 di LIE-SCHEFFERS, *Berührungstransformationen*, 1896, ove la scoperta delle proprietà non-metriche giustificanti il nome usuale di complesso tetraedrale è ascritta a H. MÜLLER, 1869), noi possiamo asserire con piena sicurezza che se SEGRE non avesse fatto che questa osservazione, per ciò solo sarebbe indimenticabile.

La rappresentazione delle rette del nostro spazio col mezzo dei mutui rapporti di sei coordinate, risale a GRASSMANN (e MÖBIUS), seguito da PLÜCKER, CAYLEY e KLEIN. Almeno a questi due ultimi era famigliare l'idea che, in conseguenza, le rette del nostro spazio possono equipararsi ai punti di una quadrica, cioè una varietà ∞^4 dello spazio a cinque dimensioni rappresentata da un'equazione quadratica. Ma per SEGRE ciò ha un più profondo significato. Significava che ove le proprietà di questa quàdrica fossero state studiate, la complicata geometria della retta cesserebbe di rimanere isolata, diverrebbe invece una parte di una interessante generalizzazione della teoria delle quadriche dello spazio ordinario. In particolare il sistema nullo di MÖBIUS nascerebbe da un ente a quattro dimensioni estensione del piano dello spazio ordinario. Nessuno che abbia studiato questo argomento può esitare a considerare l'insistenza di SEGRE in tale suggerimento come veicolo verso una semplicità e estensione maggiori.

Più generalmente, una rigata dello spazio ordinario, la quale consta di ∞^1 rette, è rappresentata, dall'indicato punto di vista, con una curva dello spazio a cinque dimensioni. Donde si trae un metodo facile per classificare le dette superficie, applicando la teoria delle curve. La teoria delle rigate razionali di terzo e quarto grado quale fu data da CAYLEY e CREMONA è certamente abbastanza affascinante; ma è una rivelazione vedere come essa sia superata contemplandola dal nuovo punto di vista.

Per dimostrarlo giova addurre un esempio facile. Le generatrici di una rigata dello spazio ordinario che incontrano ciascuna la generatrice consecutiva sono in numero di $2(n + 2p - 2)$, se n è l'ordine e p il generata della rigata. Lo si può dedurre dal teorema di SALMON, secondo cui le dette generatrici contate due volte, insieme alla curva doppia della rigata contata otto volte, costituiscono la completa intersezione della superficie con la propria Hessiana; ovvero considerando due sezioni piane, fra cui le generatrici stabiliscono una corrispondeza (1, 1), e cercando quando succeda che le tangenti in due punti corrispondenti s'incontrino. Ma interpretando le rette dello spazio come punti di uno spazio a cinque dimensioni, il citato teorema dice che se una curva di ordine n e genere p, esente da cupsidi, sta sopra una quadrica a quattro dimensioni, vi sono $(n + 2p - 2)$ punti le cui cosrispondenti tangenti cadono totalmente sulla quadrica. Ora è facile dimostrare che, per una quadrica dello spazio ordinario, sussiste il detto teorema. E ciò fa nascere l'idea che il teorema sussista anche per una curva posta sopra una quadrica a $r - 1$ dimensioni dello spazio a r. Un esame particolare mostra che ciò sussiste. Più generalmente se una curva posta su una quadrica ha tutte le sue tangenti sopra di questa, possiamo cercare quanti dei suoi piani osculatori (se ve ne sono) appartengano alla superficie; questo numero è $2(n + 4p - 4)$. E un teorema analogo sussiste riguardo agli spazi osculatori a un numero qualunque di dimensioni, purchè minore della metà del numero delle dimensioni dello spazio contenente la curva.

Ma una rigata può anche riguardarsi in uno spazio di quante si vogliano dimensioni come una varietà di ∞^2 punti distribuiti sopra ∞^1 rette. VERONESE aveva studiate le curve razionali di ordine qualunque; una tal curva, se d'ordine n, può convenientemente considerarsi come proiezione di una curva dello stesso ordine posta nello spazio a n dimensioni (« Math. Ann. », 19, 1882); per esempio una cubica piana razionale (la quale ha un punto doppio) è proiezione di una cubica razionale (senza punti doppi) dello spazio a tre dimensioni. Nello spazio a n dimensioni l'ordine di una curva è il numero delle sue intersezioni col luogo rappresentate da una equazione lineare nelle coordinate di detto spazio a coefficienti generali, cioè il numero delle intersezioni con un *primo* generale di quello spazio. Similmente l' ordine di una superficie nello spazio a n dimensioni (cioè una totalità di ∞^2 punti determinata da $n - 2$ condizioni algebriche fra dette coordinate) è il numero dei punti della superficie situati dal luogo determinato da due *primi* in posizione generale, cioè il numero dei punti d' intersezione della supeficie con un S_{a-2} generale. SEGRE ha mostrato che conviene considerare una rigata razionale di ordine n come proiezione di una rigata dello stesso ordine dello spazio a $n + 1$ dimensioni. Poi che tali superficie possono classificarsi in base alle curve d' ordine minimo della superficie che incontrano tutte le generatrici, ottenendo così per incidenza una semplice rappresentazione analitica di ogni classe. E, cosa assai significante per noi, egli ha così scoperta la base naturale dei risultati ottenuti da CLEBSCH senza abbandonare lo spazio ordinario: noi ora siamo in grado di paragonare la potenza dei due punti di vista e non vi può essere questione su quale meriti la preferenza.

SEGRE ha anche generalizzata la teoria dei luoghi formati da ∞^1 rette dello spazio a n dimensioni alla teoria dei luoghi formati da ∞^1 piani (o di spazi di dimensioni superiori, in ciò seguendo almeno in parte VERONESE). Ma è interessante rilevare la via che, a quanto sembra, seguì la sua mente. Egli aveva considerato la teoria di WEIERSTRASS della riduzione di un fascio di quadriche (sistema lineare determinato da due quadriche) in tutti gli spazi, la quale lascia in disparte il caso in cui tutte le quadriche del fascio hanno il discriminante nullo (e nulli tutti i minori di ordine determinato del discriminante). Questo caso singolare era stato considerato da KRONECKER, ma, come aveva fatto WEIERSTRASS, con ragionamenti puramente algebrici. SEGRE riuscì di dare una veste geometrica ai risultati di KRONECKER, considerando il luogo dei vertici dei coni del fascio di quadriche; allorquando la singolarità proviene soltanto dall' annullarsi del discriminante, questi vertici sono punti, ma in casi più particolari possono essere rette, piani ecc. Quando sono punti si è condotti a considerare curve razionali; quando sono rette, rigate razionali e così via. Da un geometra, l' essere giunti a stabilire un criterio geometrico affinchè tutte le quadriche di un fascio siano singolari di determinata specie, verrà giudicato come un perfezionamento dell' importante lavoro di KRONECKER.

Nello spazio a tre dimensioni l' intersezione di due quadriche è una quartica; proiettata su un piano, da un punto non situato sulla curva, essa dà luogo a una quartica con due punti doppi, che in fondo non differisce da quella studiata da CASEY ed altri sotto il nome di quartica bicircolare. Per CASEY e specialmente per DARBOUX e predecessori in tale campo, era evidente che lo studio di tale curva è, in vario modo, introduttorio alla teoria delle superficie di quart' ordine note col nome di ciclidi. Queste sono superficie di quarto ordine che, per usare la nomenclatura ordinaria, hanno per curva doppia il cerchio immaginario all' infinito. SEGRE riconobbe che dette superficie si possono ottenere come proiezioni dalla superficie dello spazio a quattro dimensioni che è intersezione di due quadriche situate in tale spazio. Ma non si contentò di tale risultato; egli scrisse una lunga ed esauriente esposizione dei relativi fenomeni, arrestandosi sopra tutti i casi che possono nascere specializzando le due quadriche, giungendo così, non soltanto a tutti i risultati ottenuti da DARBOUX, ma a molti altri ancora. Però, mentre chi legge le belle ricerche di DARBOUX sente che qualunque nuovo risultato che egli fosse per raggiungere dovrebbe ottenersi con un maneggio altrettanto abile delle equazioni, il lettore, che si è reso padrone della memoria di SEGRE, sente di essere divenuto pratico di un nuovo mondo e che riuscirebbe possibile a lui di risolvere qualunque questione relaliva a una figura che gli capitasse d' incontrare. È questo un paragone che può farsi egualmente riguardo al modo in cui SEGRE tratta qualunque altro tema, in cui egli ha sostituito uno svolgimento descrittivo a una particolareggiata teoria analitica.

Similmente noi possiamo considerare il luogo ottenuto come intersezione di due quadriche dello spazio a cinque dimensioni. Non è più una superficie, ma una varietà a tre dimensioni; essa può interpretarsi come il cosidetto complesso quadratico di rette dello spazio ordinario e, in particolare, guida alla teoria della superficie di quart' ordine di KUMMER con sedici punti doppi. Ma SEGRE trovò un' altro modo per accostarsi a questa superficie, che è ad un tempo molto semplice e molto notevole. Egli considerò nello spazio a quattro dimensioni delle varietà a tre, rappresentate ciascuna da un' equazione fra le relative coordinate e in particolare quelle di terzo ordine. La più semplice di queste varietà cubiche ∞^3 ha dieci punti doppi ed è razionale, ma gode eziandio della proprietà che qualunque sua sezione spaziale è una superficie cubica, generale nel relativo spazio segante. Si può ritenere che questo procedimento scaturisse naturalmente dai lavori e dalle equazioni del CREMONA sopra le equazioni cubiche e dalle investigazioni dello STÉPHANOS sopra i sistemi di cerchi (un cerchio dello spazio ordinario corrispondendo a una retta dello spazio a quattro dimensioni); e realmente quest'ultimo ha trovata l'equazione simmetrica della varietà considerata da SEGRE. Ma è questo un caso che illustra la facoltà di creare un nuovo mondo mediante semplici suggerimenti altrui. Egli operò infatti sulla varietà cubica che abbiamo citata per giungere alla superficie di KUMMER precisamente come GEISER aveva fatto (« Math. Annalen », I, 1869) per giungere da una superficie cubica a una quartica piana generale, osservando che questa curva è la proiezione del contorno apparente, o profilo, di una superficie di terzo ordine guardata da un suo punto. Un grande interesse possedevano, e possiedono ancora, gli studi analitici fatti riguardo a tale curva, e in connessione alla teoria delle forme quadratiche, e con gli invarianti delle forme cubiche, e con le funzioni theta di tre variabili; ma bisogna riconoscere che la teoria geometrica risultante dal punto di vista geiseriano è di molto più semplice.

Riguardo alla superficie di KUMMER, prima di SEGRE, la teoria era in gran parte algebrica e di considerevole pesantezza. Considerata in origine da GÖPEL (1847) come rappresentante la relazione esistente fra quattro funzioni theta doppie, riscoperta da KUMMER (1864) come superficie focale di una congruenza quadratica di rette, qualunque ricerca intorno alle sue proprietà non poteva intraprendersi senza un corredo di complicati sviluppi algebrici. Ora tutto ciò mutò in virtù dell'osservazione di SEGRE (1887) che la detta superficie è la proiezione del profilo della varietà cubica succitata guardata da un punto della varietà stessa; la figura di GEISER è l'intersezione della figura di SEGRE ottenuta con uno spazio a tre dimensioni passante per il centro di proiezione. Nulla, forse, può illustrare meglio l'importanza dell'opera geometrica di SEGRE che questa riduzione di una teoria complicata allo studio di una varietà della massima semplicità. Questo risultato è la conseguenza della sua disposizione a considerare le figure degli spazi a quattro dimensioni.

In tutte le memorie che abbiamo ricordate sinora le considerazioni sono non metriche. Noi non abbiamo ancora citato la sua antica memoria (1883) in cui è istituito un paragone ingegnoso e interessante fra gli invarianti metrici dei complessi lineari di rette e di sfere; nelle successive memorie il concetto generale consiste nello stabilire i relativi risultati, quando sono suscettibili di applicazioni metriche, per modo che queste scaturiscano come casi particolari di quelli proiettivi. Se lo spazio ce lo concedesse, sarebbe interessante osservare come fu graduale la realizzazione del significato della meravigliosa detronizzazione fatta da PONCELET del cerchio, che, per i Greci, era il segno concreto del principio di congruenza. SEGRE cita il Programma di KLEIN (1872), ma in generale suppone che il lettore apprezzi debitamente quel mutamento, come risulta dalle citazioni da lui fatte dell'opera di DARBOUX sulle ciclidi.

Una citazione, almeno di passaggio, deve anche venir fatta di un' antica memoria di SEGRE (1885), cioè di quella in cui egli considera (come aveva già fatto CAYLEY) la rappresentazione delle coniche del piano sui punti di uno spazio a cinque dimensioni. Da ciò egli è condotto, a quanto sembra da sè, a considerare una superficie di quart' ordine dello spazio a cinque dimensioni, che VERONESE ha studiata a fondo. Forse il risultato più importante di questa memoria è l' importanza ivi stabilita del luogo delle corde della superficie di VERONESE.

Dopo il 1886 e nel corso di parecchi anni i lavori di SEGRE furono di altro genere. Quelli di cui noi abbiamo sinora parlato, concernono infatti le proprietà geometriche che si conservano per trasformazioni lineari dello spazio; in seguito egli si volse a quelle proprietà specialmente di curve e rigate invariabili per trasformazioni algebriche, che mutano birazionalmente una curva in altra. CLEBSCH e GORDAN (« Abel'sche Funktionen », 1866) e BRILL e NÖTHER (« Math. Ann. », 7, 1873) avevano dato un aspetto geometrico alla teoria di RIEMANN e ABEL, creata per stabilire la teoria delle funzioni abeliane. SEGRE si propose di estendere questa teoria e specialmente di mostrare il vantaggio che si ricava abbandonando la restrizione di operare nello spazio a tre dimensioni. Perciò egli può riguardarsi come il progenitore di quella meravigliosa scuola italiana che tanto fece riguardo alla teoria birazionale dei luoghi algebrici. Delle sue pubblicazioni sull' argomento basterà ricordarne tre sole: quella sulle rigate algebriche (« Math. Ann. », t. 34, 1889); quella sulla teoria generale dei luoghi composti di una semplice infinità di elementi di qualunque specie (« Ann. di Mat. », 22, 1894); e quella sopra un invariante particolare rispetto alle trasformazioni birazionali di una superficie (« Atti Acc. di Torino ». 31, 1896). Particolari al riguardo esigerebbero l' uso di termini tecnici. Tuttavia rispetto alla prima giova notare la questione quale sia lo spazio da dirsi *normale* per una superficie rigata le cui sezioni piane sono di dato genere (uno spazio essendo detto *normale* per un luogo quando questo non si può ottenere come proiezione di altro dello stesso ordine in uno spazio più esteso) e si può rilevare la relazione fra il genere di una curva sulla rigata e il numero delle sue intersezioni con una generatrice qualunque. La seconda delle memorie citate riassume le lezioni fatte da SEGRE durante parecchi anni; contiene un modo di svolgere la teoria delle curve in cui il consueto uso sistematico del teorema di NÖTHER, relativo all'equazione della curva passante per l'intersezione di altre due, viene evitato, usando una formula numerativa di SCHUBERT. La terza contiene una semplice derivazione e applicazione di un'importante formula su cui ZEUTHEN aveva richiamata la attenzione dei matematici (« Math. Ann. », 4, 1871). Ma non sarà mai vantata abbastanza l'influenza generale dell'uso fatto con tanta disinvoltura da SEGRE degli spazi superiori: se dobbiamo riconoscere, come SEGRE fa ampiamente, che NÖTHER lo ha preceduto, noi sentiamo che il modo di vedere e l'influenza di SEGRE erano indispensabili affinchè venisse in dominio generale quanto fece l'illustre geometra tedesco.

Una terza direzione secondo cui SEGRE cercò di avviare la matematica (*Un nuovo campo di ricerche geometriche*, « Atti dell'Acc. Torino », 25 e 26, 1890) si connette la teoria degli immaginari in geometria di STAUDT (*Beitrage z. Geom. d. Lage*, p. es. 147-148): vi si considerano due spazi uno dei quali consta dei punti che sono immaginari coniugati ai punti dell'altro e che quindi sono in corrispondenza: non è qui il caso di dilungarci su questo argomento: ma ci sembra che questo punto di vista non possa essere mantenuto. Per esempio la retta reale che, come è noto, è possibile per un punto immaginario di un piano reale, può venire mutata in infiniti modi variando i punti di riferimento mediante cui si definiscono i punti immaginari del piano. Tuttavia la teoria svolta da SEGRE è un interessante esercizio d'algebra.

Un'altra direzione seguita da SEGRE sulle orme di DARBOUX si riferisce agli elementi, in geometria differenziale, che si possono definire senza considerazioni metriche. Un esempio ovvio è offerto delle tangenti principali in un punto di una superficie, che sono le rette tangenti nel punto doppio della curva in cui la superficie è tagliata dal corrispondente piano tangente. È chiaro che si possono trovare delle quadriche tangenti alla superficie in quel punto; le loro intersezioni con la superficie avranno un punto triplo in quel punto di contatto ed esisteranno tre di queste superficie per le quali le tangenti nel punto triplo coincidono. Le direzioni di queste tre tangenti (ognuna è la coincidenza di tre rette) evidentemente possiedono la proprietà generale rilevata dianzi per le tangenti principali. Per una cubica piana con punto doppio le tre rette congiungenti il punto doppio ai flessi godono della doppia proprietà di avere per hessiana le tangenti nel punto doppio e di essere apolari alle tre rette che uniscono il punto doppio alle tre intersezioni della curva con una retta arbitraria. Questo è forse sufficiente per indicare il carattere di dette ricerche.

Da ultimo una semplice citazione dev' essere fatta dell' articolo *Mehrdimensionale Räume* scritto da SEGRE nel 1912 per la « Enciclopedia » tedesca. Per compiutezza di particolari, ampiezza di vedute e generoso riconoscimento di quanto fece una schiera di altri autori, esso rimarrà per molti anni un monumento della coltura di quell' uomo. Di molte delle innumerevoli memorie citate egli dà un sommario tale da far comprendere che egli le lesse con cura. Un semplice esame superficiale di questa relazione basta a mostrare l' ampiezza del debito che hanno verso di lui coloro che insegnano e studiano lo stesso argomento.

H. F. BAKER
professore nell' Università di Cambridge