UMI

Sunti di lavori italiani

* Lavori di: M. Picone, A. Tonolo

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (1927), n.5, p. 269–275.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_5_269_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1927.

SUNTI DI LAVORI ITALIANI

M. PICONE: *Sulle autosoluzioni e sulle formole di maggiorazione per gli integrali delle equazioni differenziali lineari ordinarie autoaggiunte.* [Memoria in corso di stampa nei « Mathematische Zeitschrift », (Springer, Berlin)].

Per le autosoluzioni relative al sistema lineare:

$$\frac{d}{dx}\left(\theta \frac{dy}{dx}\right) + (\lambda A + B)y = 0, \quad y(a) = y(b) = 0. \tag{1}$$

si hanno due proprietà di minimo, una stabilita da HILBERT e dalla sua Scuola, l'altra da me nella mia Tesi d'abilitazione (Pisa, « Annali della R. Scuola Normale Superiore », vol. X, 1909). Da quest'ultima deduco, nella Memoria attuale, il seguente teorema sugli zeri delle autosoluzioni: *Siano* $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ *la successione degli autovalori positivi (negativi) e* $u_0, u_1, \ldots$ *quella delle corrispondenti autosoluzioni: detti* $x_{n1}, \ldots, x_{nn}$ *gli* n *zeri, interni ad* (a, b), *di* $u_n(x)$, *si ha che il determinante*

$$|u_h(x_{nk})| \quad (h = 0, 1, \ldots, n-1\,; \;\; k = 1, 2, \ldots, n)$$

è sempre diverso da zero. Questo teorema mi consente di dedurre immediatamente dalla mia proprietà di minimo delle autosoluzioni quella hilbertiana, per la quale, inoltre, viene così dimostrato che essa pure caratterizza le autosoluzioni.

Ciò premesso, passo a considerare il problema della maggiorazione delle soluzioni del sistema lineare

$$\frac{d}{dx}\left(\theta \frac{dy}{dx}\right) + Ay = f(x), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \tag{2}$$

nell'ipotesi (necessaria) che l'unità non si trovi fra gli autovalori di λ nell'equazione (1), fattovi $B(x) \equiv 0$. Esso viene completamente risoluto basandosi sulle sopradette proprietà di minimo delle autosoluzioni. Ed ecco taluni risultati:

Se μ è un valore approssimato per difetto del più piccolo autovalore positivo e se $\mu > 1$, si ha:

$$\max|y| \leqq \frac{b-a}{4}\,\frac{\mu}{\mu-1}\int_a^b \frac{dx}{\theta(x)}(\max|f| + \gamma\max|A|) + \gamma,$$

ove γ designa il maggiore fra i due numeri $|\alpha|$ e $|\beta|$.

Se μ'_n e μ''_n designano due valori approssimati dell'autovalore positivo λ_n, il primo per difetto ed il secondo per eccesso, e se $\mu''_{n-1} < 1 < \mu'_n$, si ha:

$$\max|y| \leqq \frac{b-a}{4}\left(\frac{n\mu''_{n-1}}{1-\mu''_{n-1}} + \frac{\mu'_n}{\mu'_n - 1}\right)\int_a^b \frac{dx}{\theta(x)}(\max|f| + \gamma\max|A|) + \gamma.$$

Applicando questi risultati, per esempio, alla soluzione, nell'intervallo $(0, \pi)$, del sistema

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y\cos x = f(x), \quad y(0) = \alpha, \quad y(\pi) = \beta,$$

si trova

$$\max|y| \leqq 6\max|f| + 7\gamma.$$

Vengono anche, in seguito, considerati nella Memoria i problemi di maggiorazione sia, ancora, per l'equazione differenziale (2) e generalizzando le ulteriori condizioni (lineari) imposte all'integrale, sia per le equazioni differenziali lineari ordinarie autoaggiunte d'ordine superiore al secondo, sia, infine, per le equazioni integrali di seconda specie che si collegano coi problemi al contorno relativi alle equazioni differenziali ordinarie o alle derivate parziali [1]. Ecco, per esempio, un risultato per la soluzione del sistema del quart'ordine:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\theta\frac{d^2y}{dx^2}\right) + Ay = f(x), \quad y(a) = y'(a) = y(b) = y'(b) = 0.$$

[1] Alla diretta maggiorazione dell'integrale della più generale equazione ellittico-parabolica alle derivate parziali del 2° ordine, in quante si vogliano variabili, ho però già dedicato una circostanziata Nota pubblicata nel fascicolo del 6 febbraio 1927 dei « Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei », ed un'altra dedicherò prossimamente alla diretta maggiorazione dell'integrale della più generale equazione *totalmente* parabolica alle derivate parziali del 2° ordine.

Se riesce $192 \min \theta(x) + (b-a)^4 \min A(x) > 0$, si ha

$$\max |y| \leq \frac{(b-a)^4 \max |f|}{192 \min \theta + m(b-a)^4},$$

ove m è lo zero se $A(x)$ è non negativa in (a, b) ed è il minimo di $A(x)$ nell'altro caso.

Napoli, 1° settembre 1927.

M. Picone: *Sul metodo delle minime potenze ponderate e sul metodo di Ritz per il calcolo approssimato nei problemi della Fisica-matematica.* (Memoria in corso di stampa nei « Rendiconti del Circolo Matematico » di Palermo).

Contiene uno sguardo d'insieme dei varî lavori fin ad oggi apparsi sul metodo delle minime potenze del quale — inoltre — viene data la seguente nuova formulazione generale: Il problema consista nella determinazione di una funzione y del punto $P(x_1, x_2, \dots, x_r)$ verificante le $m+1$ equazioni:

$$(1) \qquad F[y] = 0, \quad F_1[y] = 0, \dots, \quad F_m[y] = 0,$$

ove $F[y]$, $F_1[y], \dots, F_m[y]$, designano $m+1$ assegnati funzionali. Detti: $\boldsymbol{T}_k$ il dominio dove deve aver luogo l'equazione $F_k[y] = 0$, $\Omega_k(\boldsymbol{T})$ un'assegnata funzione additiva di dominio $\boldsymbol{T}$, mai negativa, definita per $\boldsymbol{T}$ variabile in $\boldsymbol{T}_k$ e p_k un assegnato numero positivo, si consideri la somma di potenze *ponderate* rappresentata dal funzionale seguente:

$$J[y] = \int_{\boldsymbol{T}} |F[y]|^p \, d\Omega(\boldsymbol{T}) + \sum_{k=1}^{m} \int_{\boldsymbol{T}_k} |F_k[y]|^{p_k} \, d\Omega_k(\boldsymbol{T}),$$

ove ogni integrale è preso nel senso di Stieltjes. Si possieda un sistema $\varphi_0(P)$, $\varphi_1(P), \dots$, di funzioni, definite nel dominio dove deve esserlo la $y(P)$, ivi completo e tale che, posto:

$$y_n = a_0^{(n)} \varphi_0 + a_1^{(n)} \varphi_1 + \dots + a_n^{(n)} \varphi_n,$$

per ogni assegnata funzione y, che abbia le qualità della cercata soluzione del problema, si possano scegliere le costanti $a_0^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}$ in maniera che riesca:

$$(2) \qquad \lim_{n \to \infty} J[y_n] = J[y].$$

Si consideri ora la funzione delle $n+1$ variabili $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$:

$$J_n(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = J[\alpha_0\varphi_0 + \alpha_1\varphi_1 + \ldots + \alpha_n\varphi_n],$$

e si supponga che, per ogni valore di n, tale funzione sia dotata di minimo assoluto, che consegue per i valori $A_0^{(n)}, A_1^{(n)}, \ldots, A_n^{(n)}$ delle $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Posto:

$$Y_n = A_0^{(n)}\varphi_0 + A_1^{(n)}\varphi_1 + \ldots + A_n^{(n)}\varphi_n,$$

si assuma questa combinazione Y_n come la migliore combinazione delle φ_ν approssimante, al divergere di n, la cercata soluzione y.

In questa formulazione del metodo delle minime potenze non è dunque richiesta per le funzioni del sistema fondamentale $[\varphi_\nu]$ altra condizione che quella di costituire un sistema completo per cui sia possibile verificare la (2). Pertanto, in particolare, non occorre che le funzioni φ_ν siano tali che le loro combinazioni y_n soddisfino, comunque se ne scelgano i coefficienti, a talune delle equazioni (1). Per esempio, nell'applicazione ai problemi al contorno per le equazioni differenziali ordinarie o alle derivate parziali, vien tolta la forte e ostacolante condizione che le dette combinazioni verifichino le equazioni al contorno, ridotte omogenee.

Nella Memoria viene studiato il detto metodo nel calcolo della soluzione:

I) della più generale equazione integrale di FREDHOLM;

II) del problema al contorno per la più generale equazione lineare autoaggiunta alle derivate parziali del 2° ordine, del tipo ellittico, relativo ad un dominio limitato da un qualsiasi numero di contorni continui, per il quale problema, nel piano (u, v), basta porre:

$$F[y] \equiv \frac{\partial}{\partial u}\left(\theta\frac{\partial y}{\partial u} + \theta'\frac{\partial y}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\theta'\frac{\partial y}{\partial u} + \theta''\frac{\partial y}{\partial v}\right) + Ay - f,$$

$$F_1[y] \equiv y[a_1(t), b_1(t)] - g_1(t), \ldots, \quad F_m[y] \equiv y[a_m(t), b_m(t)] - g_m(t),$$

ove $u = a_k(t)$, $v = b_k(t)$ sono le equazioni parametriche degli m contorni del dominio e le $g_k(t)$ forniscono gli assegnati valori al contorno;

III) del problema al contorno per la più generale equazione differenziale, lineare, ordinaria del 2° ordine.

Si dimostra che: Non appena l'unità non è un autovalore per il problema considerato, il metodo fornisce la combinazione d'approssimazione Y_n, per la quale, nei problemi I) e II), si può assicurare la convergenza in media verso la cercata soluzione y, e nel problema III) la convergenza puntuale ed uniforme di essa e della derivata $\frac{dY_n}{dx}$, verso la y e la derivata $\frac{dy}{dx}$.

Per i problemi I) e II) si indica in qual modo si possa pervenire ad una maggiorazione dell' errore d' approssimazione relativo alla Y_n, mostrando altresì il grande vantaggio fornito, per esempio nel problema II), dal non imporre alla φ_ν la condizione che le combinazioni y_n verifichino le equazioni al contorno. Per il problema III) si perviene ad un' *effettiva* soddisfacente maggiorazione di detto errore, e si dimostra anche, proprio per aver liberato le φ_ν dalle condizioni al contorno, che si possono sempre scegliere, ove ci si metta nel campo analitico, le φ_ν in maniera che l' errore d' approssimazione relativo alla Y_n, *sia, al divergere di* n, *infinitesimo d' ordine comunque elevato rispetto a* $1/n$. Si dimostra pure che tale circostanza, contrariamente a quanto crede qualche Autore, più non si verifica quando — non volendo liberare le φ_ν dalle condizioni al contorno — considerando, per esempio, le condizioni $y(0) = y(\pi) = 0$, si ponga $\varphi_\nu(x) = \text{sen}\, \nu x$.

Viene infine considerato il metodo di Ritz per il problema III). Se ne allarga il campo di validità fin dove è posssibile, cioè, com' è dimostrato nella Memoria, fino a che il più piccolo autovalore positivo è maggiore di uno. Ma, nonostante ciò, si conclude esprimendo l' opinione ch' esso metodo, avendo un campo di possibile applicazione assai più ristretto e, in ogni caso, una pratica capacità d' approssimazione assai minore di fronte a quello delle minime potenze, dovrebbe, il più spesso, cedere il posto a quest' ultimo nelle applicazioni.

Nella Memoria è fatto sistematico uso di talune formole di maggiorazione, alcune nuove ed altre date nella mia Memoria: *Sulle autosoluzioni e sulle formole di maggiorazione per gli integrali delle equazioni differenziali lineari ordinarie autoaggiunte,* in corso di stampa nei « Mathematische Zeitschrift », sunteggiata nel sunto che precede; e viene così dimostrato come l' ottenimento delle formole di maggiorazione di quel tipo offra, nei problemi al contorno, mezzi potenti per lo studio della convergenza dei metodi d' approssimazione alla Fourier e per la valutazione dell' errore relativo. Ecco perchè mi propongo di dedicare altre ricerche relative a quelle formule ([1]).

Napoli, 3 ottobre 1927.

([1]) Cfr. la nota a piè di pagina nel sunto che precede.

A. TONOLO: *Magnetizzazione di un ellissoide pieno o cavo in un campo magnetico uniforme.* [Atti del R. Istituto Veneto, volume LXXXIV, (1925)].

L'Autore traduce il problema in una equazione funzionale (per l'ellissoide pieno) e in un sistema di due equazioni funzionali (per l'ellissoide cavo) cui deve soddisfare la densità superficiale del magnetismo indotto. Egli le risolve applicando, con opportuni accorgimenti, il metodo delle approssimazioni successive. Ritrova poi le formule date dal DUHEM per la funzione potenziale del magnetismo indotto della sfera cava, ed estende al suo caso il comportamento di questa funzione, nella ipotesi che sia elevato il coefficiente di magnetizzazione della sostanza che riempie l'involucro.

— — *Sulle equazioni per la rappresentabilità conforme di una varietà a tre dimensioni sullo spazio euclideo.* [Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. III, (1926)].

Si fa vedere che le nove equazioni date dal FINZI per la rappresentabilità dichiarata nel titolo della Nota, si riducono a sei, quando si tiene conto delle identità del BIANCHI.

— — *Sulle varietà a tre dimensioni il cui* ds^2 *è riducibile al tipo di Liouville.* [Atti del R. Istituto Veneto, vol. LXXXVI, (1927)].

Con i metodi del Calcolo assoluto di RICCI, si imposta dapprima il problema seguente: Data una varietà a tre dimensioni, trovare i caratteri invariantivi che essa deve avere, affinchè il quadrato del suo elemento lineare sia riducibile al tipo di LIOUVILLE, e determinare tutti i modi possibili con i quali si effettua questa riducibilità. La quistione viene completamente risolta per le seguenti varietà:

a) Varietà che hanno uguali le tre curvature principali riemanniane.

b) Varietà che hanno due curvature principali riemanniane uguali e distinte dalla terza.

c) Varietà che hanno le tre curvature riemanniane principali distinte ma costanti.

I risultati cui si perviene sono i seguenti: Delle varietà del tipo *a)* solo quelle a curvatura costante negativa o nulla hanno il loro ds^2 riducibile al tipo voluto in ∞^3 modi. Delle varietà del tipo *b)*, solo quelle che sono normali nel senso di BIANCHI, ove la congruenza principale relativa alla curvatura distinta è isotropa e geodetica, e inoltre le curvature riemanniane principali variano soltanto lungo le linee di questa congruenza, possono godere della riducibilità sopradetta. Questa avviene certamente se, oltre alle condizioni precedenti, sono verificate altre relazioni invariantive. Il numero poi dei modi con i quali si effettua la trasformabilità è ∞^3, ∞^2, ∞ a seconda di certe condizioni dichiarate nella Memoria. Infine, le varietà del tipo *c)* non hanno il ds^2 riducibile al tipo di LIOUVILLE.

— — *Stelle di ennuple ortogonali di congruenze di curve in una* V_n. [Atti del R. Istituto Lombardo, vol. LX, (1927)].

Si estende alla varietà ad un numero qualsivoglia di dimensioni ed a metrica qualunque, il concetto di *fascio di congruenze di curve* che il RICCI aveva dato per le varietà a due dimensioni. Si sviluppano poi alcune conseguenze che da questa estensione derivano le quali trovano le analoghe nelle V_2.

— — *Sul teorema di Cauchy della teoria delle funzioni di variabile complessa.* [Atti del R. Istituto Veneto, vol. LXXXVI, (1927)].

L'Autore dimostra il teorema dichiarato nel titolo della Nota supponendo che la derivata della funzione esista e sia *limitata* nel suo campo di esistenza.

(Condizioni intermedie fra quelle classiche, che esigono la continuità della derivata, e quelle del GOURSAT che ne impongono soltanto la esistenza). Si mostra ancora che, se una funzione continua di variabile complessa è tale che per essa siano nulli tutti gli integrali estesi ai perimetri dei rettangoli che hanno un vertice fisso e i lati paralleli agli assi coordinati, detta funzione è certamente analitica.