Bollettino Unione Matematica Italiana

N. Agronomof

Note sur les déterminants

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (1927), n.5, p. 266–268.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_5_266_0>

Note sur les déterminants

par N. Agronomof (a Vladivostok).

1. On peut représenter les déterminants des divers ordres sous la forme

$$\begin{vmatrix} (111)+(112)+(113) & (211)+(212)+(213) \\ (121)+(122)+(123) & (221)+(222)+(223) \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} (111)+(112)+(113)+(114) & (211)+(212)+(213)+(214) & (311)+(312)+(313)+(31 \\ (121)+(122)+123)+(124) & (221)+(222)+(223)+(224) & (321)+(322)+(323)+(32 \\ (131)+(132)+(133)+(134) & (231)+(232)+(233)+(234) & (331)+(332)+(333)+(33 \end{vmatrix}$$

et en général

$$\Delta = |\,(mk1)+(mk2)+(mk3)+\ldots+(mk\overline{n+1})\,|.$$

Nous appellons *déterminant complémentaire d'ordre* k d'un déterminant donné celui qui se forme, lorsqu'on supprime dans chaque élément k termes correspondants.

Par exemple, les déterminants complémentaires de

$$\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+2+3 & 1+2+4 \\ 1+3+5 & 2+3+7 \end{vmatrix}$$

sont

$$\begin{vmatrix} 2+3 & 2+4 \\ 3+5 & 3+7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1+3 & 1+4 \\ 1+5 & 2+7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1+2 & 1+2 \\ 1+3 & 2+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}.$$

Désignons par

$$\begin{array}{l} d_1, \quad d_2, \quad d_3, \ldots \quad d_{n+1} \\ d_{11}, \quad d_{12}, \ldots\ldots\ldots d_{n\,\overline{n+1}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

les déterminants complémentaires des divers ordres.

Cela posé, nous avons le théorème:

$$\Delta - \Sigma d_{\alpha_1} + \Sigma d_{\alpha_2\alpha_3} - \Sigma d_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} + \ldots = 0,$$

lorsqu'on y remplace α_1, $\alpha_2, \ldots$ par tous les nombres entiers depuis 1 jusqu'à n.

En effet, les termes généraux des déterminants

$$\Delta, \quad d_1, \quad d_2, \ldots \quad d_{11}, \quad d_{12}, \ldots$$

tisfont au… identité (16) que nous obtenons dans l'article: *Sur quelques formules concernant la formule* $\sum\binom{n}{k}(n-k)^n = n!$

Par exemple:

$$\begin{vmatrix} 2+2+2 & 2+2+1 \\ 2+2+3 & 3+3+3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2+2 & 2+1 \\ 2+3 & 3+3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2+2 & 2+1 \\ 2+3 & 3+3 \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} 2+2 & 2+2 \\ 2+2 & 3+3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Désignons par $\Delta^{(ei)}$ le déterminant mineur du premier ordre du Δ et par

$$d_1^{(ei)},\quad d_2^{(ei)},\ldots$$
$$d_{11}^{(ei)},\quad d_{12}^{(ei)},\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

les déterminants mineurs analogues aux déterminants complémentaires du Δ.

Cela posé, nous avons le théorème suivant:

$$\Delta^{(ei)} - \Sigma d_{\alpha_1}^{(ei)} + \Sigma d_{\alpha_1\alpha_2}^{(ei)} - \ldots = 0.$$

Par exemple

$$\begin{vmatrix} 1+2+1+3 & 2+1+3+2 & 1+0+0+1 \\ 1+3+2+1 & 3+1+1+1 & 2+1+1+3 \\ 1+1+1+1 & 2+2+1+3 & 3+1+1+1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2+1+3 & 1+3+2 & 0+0+1 \\ 3+2+1 & 1+1+1 & 1+1+3 \\ 1+1+1 & 2+1+3 & 1+1+1 \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} 1+1+3 & 2+3+2 & 1+0+1 \\ 1+2+1 & 3+1+1 & 2+1+3 \\ 1+1+1 & 2+1+3 & 3+1+1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1+2+3 & 2+1+2 & 1+0+1 \\ 1+3+1 & 3+1+1 & 2+1+3 \\ 1+1+1 & 2+2+3 & 3+1+1 \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} 1+2+1 & 2+1+3 & 1+0+0 \\ 1+3+2 & 3+1+1 & 2+1+1 \\ 1+1+1 & 2+2+1 & 3+1+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+2 & 2+1 & 1+0 \\ 1+3 & 3+1 & 2+1 \\ 1+1 & 2+2 & 3+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+1 & 2+3 & 1+0 \\ 1+2 & 3+1 & 2+1 \\ 1+1 & 2+1 & 3+1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1+3 & 2+2 & 1+1 \\ 1+1 & 3+1 & 2+3 \\ 1+1 & 2+3 & 3+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2+1 & 1+3 & 0+0 \\ 3+2 & 1+1 & 1+1 \\ 1+1 & 2+1 & 1+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2+3 & 1+2 & 0+1 \\ 3+1 & 1+1 & 1+3 \\ 1+1 & 2+3 & 1+1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1+3 & 3+2 & 0+1 \\ 2+1 & 1+1 & 1+3 \\ 1+1 & 1+3 & 1+1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 3+1+1+1 & 2+1+1+3 \\ 2+2+1+3 & 3+1+1+1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1+1+1 & 1+1+3 \\ 2+1+3 & 1+1+1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3+1+1 & 2+1+3 \\ 2+1+3 & 3+1+1 \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} 3+1+1 & 2+1+3 \\ 2+2+3 & 3+1+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+1+1 & 2+1+1 \\ 2+2+1 & 3+1+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3+1 & 2+1 \\ 2+2 & 3+1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 3+1 & 2+1 \\ 2+1 & 3+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3+1 & 2+3 \\ 2+3 & 3+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+1 & 1+1 \\ 2+1 & 1+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+1 & 1+3 \\ 2+3 & 1+1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1+1 & 1+3 \\ 1+3 & 1+1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ etc.}$$

3. Désignons par $\Delta^{(eis)}$, $\Delta^{(eisk)}$,... les déterminants mineurs des ordres 2, 3,... du Δ et par

$$\left\{ \begin{array}{ll} d_1^{(eis)}, & d_2^{(eis)},\ldots \\ d_{11}^{(eis)}, & d_{12}^{(eis)},\ldots \\ \ldots & \ldots \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{ll} d_1^{(eisk)}, & d_2^{(eisk)},\ldots \\ d_{11}^{(eisk)}, & d_{12}^{(eisk)},\ldots \\ \ldots & \ldots \end{array} \right.$$

les déterminants mineurs analogues des déterminants complémentaires du Δ.

Cela posé, nous avons les égalités suivantes

$$\Delta^{(eis)} - \Sigma d_{\alpha_1}^{(eis)} + \Sigma d_{\alpha_1\alpha_2}^{(eis)} - \ldots = 0$$
$$\Delta^{(eisk)} - \Sigma d_{\alpha_1}^{(eisk)} + \Sigma d_{\alpha_1\alpha_2}^{(eisk)} - \ldots = 0.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La démonstration est évidente.