

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

GIUSEPPE SCORZA

## Sulla derivazione sotto il segno di integrale a limiti variabili

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,*  
Vol. **6** (1927), n.5, p. 260–265.

Unione Matematica Italiana

<[http:  
//www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1927\\_1\\_6\\_5\\_260\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_5_260_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

**Sulla derivazione sotto il segno di integrale  
a limiti variabili.**

Nota di GIUSEPPE SCORZA (a Napoli).

Nei trattati d'Analisi, studiando la continuità e la derivabilità della funzione

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy,$$

è fatta d'ordinario l'ipotesi, tacita a volte, che le due curve  $y = \alpha(x)$ ,  $y = \beta(x)$  siano tutte interne all'insieme  $E$  in cui è definita la  $f(x, y)$ .

È ovvio che, se  $f(x, y)$ ,  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$  sono funzioni continue, la  $F(x)$  è continua anche se si suppone che i diagrammi di  $\alpha(x)$  e  $\beta(x)$  costituiscano la frontiera, o parte della frontiera, dell'insieme in cui è definita la  $f(x, y)$ .

Si dimostra che anche in quest'ultimo caso la  $F(x)$  è derivabile, se si suppone che siano derivabili  $\alpha(x)$  e  $\beta(x)$  e che si possa definire in tutto  $E$  una funzione continua che nei punti interni di  $E$  coincida con la  $\frac{\partial f}{\partial x}$  <sup>(1)</sup>.

In questa Nota, riprenderò in esame la questione, cercando di togliere questa ipotesi.

In un intervallo  $A: a' \leq x \leq a''$  sono definite due funzioni continue e derivabili  $\alpha(x)$  e  $\beta(x)$ . Diciamo  $E$  l'insieme chiuso del piano costituito dai punti che hanno la prima coordinata contenuta in  $A$  e la seconda nell'intervallo chiuso di punti estremi  $\alpha(x)$  e  $\beta(x)$ .

Supponiamo che in  $E$  sia definita una funzione  $f(x, y)$  continua e dotata, in ogni punto interno ad  $E$ , di derivata parziale rispetto alla  $x$ , anch'essa continua.

Nelle ipotesi fatte è sempre definita in  $A$  la funzione della  $x$

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy$$

che risulta continua.

Orbene, supposto che per la  $f_x(x, y)$  (che può essere infinita od anche mancare o non essere eseguibile sulla frontiera di  $E$ ) l'integrale (eventualmente improprio)

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x, y) dy$$

sia convergente, si può affermare che:

La  $F(x)$  è derivabile in un punto  $x_0$  interno ad  $A$  e per la sua derivata vale la formula

$$(1) \quad F'(x_0) = \int_{\alpha(x_0)}^{\beta(x_0)} f_x(x_0, y) dy + \beta'(x_0)f(x_0, \beta(x_0)) - \alpha'(x_0)f(x_0, \alpha(x_0)),$$

<sup>(1)</sup> Vedi, ad es.: PICONE, *Lezioni di Analisi Infinitesimale*, a cura del Circolo Matematico di Catania, pp. 409-411, 603-604.

se:

I. in un conveniente intorno del punto  $x_0$  le derivate  $\alpha'(x)$ , e  $\beta'(x)$  di  $\alpha(x)$  e  $\beta(x)$  sono limitate, e se:

II. fissato ad arbitrio un numero positivo  $\varepsilon$ , è possibile determinare un intorno  $I(\varepsilon)$  di  $x_0$  ed un numero, anch'esso positivo,  $\eta(\varepsilon)$ , tali che risulti sempre

$$\left| \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x, y) dy - \int_{\alpha(x)+\sigma}^{\beta(x)-\sigma} f_x(x, y) dy \right| < \varepsilon$$

al variare di  $x$  in  $I(\varepsilon)$  per  $0 < \sigma < \eta(\varepsilon)$ .

Questa seconda proprietà è in particolare verificata, se l'integrale (eventualmente improprio)

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x, y) dy,$$

è supposto, secondo una locuzione introdotta dal prof. PICONE nel citato suo « Corso d'Analisi », *uniformemente convergente nelle vicinanze del punto  $x$*  <sup>(1)</sup>.

È opportuno distinguere il caso in cui  $\alpha(x)$  e  $\beta(x)$  assumono lo stesso valore in  $x_0$ , da quello in cui si ha  $\alpha(x_0) \neq \beta(x_0)$ .

Supponiamo anzi tutto che sia  $\alpha(x_0) = \beta(x_0)$ ; in  $x_0$  sarà

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_{\alpha(x_0+\Delta x)}^{\beta(x_0+\Delta x)} f(x_0 + \Delta x, y) dy,$$

(1) Con l'ipotesi II la convergenza dell'integrale improprio

$$(a) \quad \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x, y) dy,$$

non è intesa evidentemente nel senso ordinario, essa è più generale; ed il teorema continuerebbe a valere anche se si supponesse soltanto che esiste sempre, determinato e finito, il limite

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{\alpha(x)+\sigma}^{\beta(x)-h(x_0, \sigma)} f_x(x, y) dy,$$

ove  $\sigma$  è positivo e  $h(x_0, \sigma)$  è funzione positiva di  $x_0$  e di  $\sigma$ , infinitesima con  $\sigma$ , arbitrariamente fissata, con la condizione, ben inteso, che la tendenza al limite riesca uniforme nelle vicinanze del punto  $x_0$ . Naturalmente, si dovrà intendere che l'integrale (a) rappresenti tale limite.

e, detto  $y'$  un conveniente punto dell'intervallo  $[x(x_0 + \Delta x), \beta(x_0 + \Delta x)]$ , si avrà

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{\beta(x_0 + \Delta x) - \alpha(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} f(x_0 + \Delta x, y'),$$

quindi

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{\beta(x_0 + \Delta x) - \beta(x_0)}{\Delta x} f(x_0 + \Delta x, y') - \frac{\alpha(x_0 + \Delta x) - \alpha(x_0)}{\Delta x} f(x_0 + \Delta x, y').$$

Di qui, passando al limite per  $\Delta x \rightarrow 0$ , tenuto conto della derivabilità delle funzioni  $\alpha(x)$  e  $\beta(x)$ , della continuità di  $f(x, y)$  e della eguaglianza

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y' = \alpha(x_0) = \beta(x_0),$$

si ricava

$$F'(x_0) = \beta'(x_0)f(x_0, \beta(x_0)) - \alpha'(x_0)f(x_0, \alpha(x_0)).$$

cioè la (1).

Sia adesso  $\alpha(x_0) \neq \beta(x_0)$  e supponiamo  $\beta(x_0) > \alpha(x_0)$ , ipotesi, naturalmente, non essenziale.

Poniamo

$$\sigma_1 = \frac{\beta(x_0) - \alpha(x_0)}{3}$$

e consideriamo un intorno  $J(\sigma_1)$  del punto  $x_0$  tale che in esso  $\alpha'(x)$  e  $\beta'(x)$  siano limitate e che inoltre per ogni  $x_0 + \Delta x$  contenuto in  $J(\sigma_1)$  si abbia simultaneamente

$$\begin{aligned} |\alpha(x_0) - \alpha(x_0 + \Delta x)| &< \sigma_1, \\ |\beta(x_0) - \beta(x_0 + \Delta x)| &< \sigma_1. \end{aligned}$$

Ciò posto, le curve di equazioni

$$y = \alpha(x) + \sigma_n, \quad y = \beta(x) - \sigma_n$$

saranno tutte interne ad  $E$ , finchè  $x$  varia in  $J(\sigma_1)$  ed è  $0 < \sigma_n \leq \sigma_1$ , e quindi sarà continua e derivabile in  $J(\sigma_1)$  la funzione

$$F_n(x) = \int_{\alpha(x) + \sigma_n}^{\beta(x) - \sigma_n} f(x, y) dy,$$

e per la  $F_n'(x)$  sussisterà la (1), sarà cioè

$$F_n'(x) = \int_{\alpha(x) + \sigma_n}^{\beta(x) - \sigma_n} f(x, y) dy + \beta'(x)f(x, \beta(x) - \sigma_n) - \alpha'(x)f(x, \alpha(x) + \sigma_n).$$

Si consideri ora una successione decrescente di numeri (positivi)

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > \dots$$

dove  $\sigma_1$  è il numero sopra definito e dove è

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0.$$

Si avrà che in  $J(\sigma_1)$  è da una parte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x),$$

e dall'altra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F'_n(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x, y) dy + \beta'(x)f(x, \beta(x)) - \alpha'(x)f(x, \alpha(x)) = \varphi(x).$$

Orbene, se facciamo vedere che, comunque assegnato un numero positivo  $\varepsilon$ , è possibile determinare un intorno  $H(\varepsilon)$  di  $x_0$ , ed un numero naturale  $n$  tali che per  $m > n$  e per ogni punto di  $H(\varepsilon)$  si abbia

$$(2) \quad |F'_m(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

avremo <sup>(1)</sup> che la  $F(x)$  è derivabile in  $x_0$  e che è, anche in questo caso,

$$F'(x_0) = \int_{\alpha(x_0)}^{\beta(x_0)} f_x(x_0, y) dy + \beta'(x_0)f(x_0, \beta(x_0)) - \alpha'(x_0)f(x_0, \alpha(x_0)).$$

<sup>(1)</sup> L'affermazione del testo si fonda sul seguente teorema:

Se in un insieme  $A$  è definita una successione di funzioni  $f_1(P), f_2(P), \dots$  derivabili rispetto alla  $x_h$  in ogni punto interno ad  $A$ , ed è

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(P) = f(P)$$

la  $f(P)$  è derivabile rispetto alla  $x_h$  in un punto  $P_0$ , interno ad  $A$ , quando la successione delle derivate  $\frac{\partial f_n}{\partial x_h}$  è *uniformemente convergente nelle vicinanze di  $P_0$* , cioè quando: fissato ad arbitrio un numero positivo  $\varepsilon$ , è sempre possibile determinare un intorno  $I(\varepsilon)$  di  $P_0$  ed un numero  $n$  tali che per  $P$  contenuto nell'intersezione di  $A$  ed  $I(\varepsilon)$  e per  $m \geq n$ , sia

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_h} f_m(P) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial x_h} f_n(P) \right| < \varepsilon:$$

nel qual caso è

$$\frac{\partial}{\partial x_h} f(P_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial x_h} f_n(P_0).$$

Il teorema non è che una facile generalizzazione della nota proposizione che assicura la derivabilità di una funzione  $f(P)$ , definita come

La differenza al primo membro della (2) vale

$$(3) \quad \left| \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x, y) dy - \int_{\alpha(x) + \sigma_m}^{\beta(x) - \sigma_m} f_x(x, y) dy + \beta' f(x, \beta) - \beta' f(x, \beta - \sigma_m) - \alpha' f(x, \alpha) + \right. \\ \left. + \alpha' f(x, \alpha + \sigma_m) \right| \leq \left| \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x, y) dy - \int_{\alpha(x) + \sigma_m}^{\beta(x) - \sigma_m} f_x(x, y) dy \right| + |\beta'| |f(x, \beta) - f(x, \beta - \sigma_m)| + |\alpha'| |f(x, \alpha) - f(x, \alpha + \sigma_m)|.$$

Ora, per la II, assegnato il numero positivo  $\frac{\varepsilon}{3}$ , è sempre possibile determinare un intorno  $I\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$  di  $x_0$  ed un numero naturale  $m'$  tali che per  $x$  contenuto in  $I\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$  e per ogni numero naturale  $q$  risulti

$$\left| \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x, y) dy - \int_{\alpha(x) + \sigma_{m'+q}}^{\beta(x) - \sigma_{m'+q}} f_x(x, y) dy \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Inoltre, detti  $M$  ed  $N$  gli estremi superiori di  $|\alpha'(x)|$  e  $|\beta'(x)|$  in  $J(\sigma_1)$ , esisteranno due numeri  $n'$  ed  $n''$  tali che risulti in  $J(\sigma_1)$

$$\left| M[f(x, \alpha) - f(x, \alpha + \sigma_{n'+q})] \right| < \frac{\varepsilon}{3} \\ \left| N[f(x, \beta) - f(x, \beta - \sigma_{n''+q})] \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Indicata con  $H(\varepsilon)$  l'intersezione di  $I\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$  ed  $J(\sigma_1)$ , perchè il secondo membro della (3) risulti minore di  $\varepsilon$  in ogni punto di  $H(\varepsilon)$ , per  $m > n$ , basterà prendere  $n$  uguale al maggiore dei tre numeri  $m'$ ,  $n'$ ,  $n''$ .

Napoli, 26 luglio 1927.

limite di una successione di funzioni derivabili, quando la successione delle derivate converge uniformemente.

La sua dimostrazione può essere condotta sulla traccia di quella data dal prof. PICONE per la proposizione cui ho alluso (PICONE: *Lezioni di Analisi Infinitesimale*, n. 69).