Bollettino Unione Matematica Italiana

Antonio Colucci

Sopra un teorema di BrioschL

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (1927), n.5, p. 258–260.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_5_258_0>

Sopra un teorema di Brioschi.

Nota di ANTONIO COLUCCI (a Napoli).

1. Il teorema ([2]) di cui intendo parlare dice, in sostanza, che se $\|a_{nn}\|$ è un determinante ortogonale (ad elementi reali), l'equazione

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = 0,$$

è un' equazione reciproca, ed una sua radice reale, posto che esista, deve avere modulo eguale ad uno.

Mi propongo di mostrare qui che tale ultima proprietà è affatto generale, cioè essa si verifica anche per le radici complesse di detta equazione.

([2]) PASCAL, *I determinanti*, (1923), p. 243.

Infatti, indicando con $f(x)$ il primo membro della (1), e tenendo conto delle note relazioni:

$$a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \dots + a_{in}a_{jn} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

si trova facilmente

$$(2) \qquad [f(x)]^2 = x^n \begin{vmatrix} 2a_{11} + y & a_{12} + a_{21} & \dots & a_{1n} + a_{n1} \\ a_{21} + a_{12} & 2a_{22} + y & \dots & a_{2n} + a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} + a_{1n} & a_{n2} + a_{2n} & \dots & 2a_{nn} + y \end{vmatrix},$$

dove, com' è senz' altro evidente, si è posto $y = x + \frac{1}{x}$.

Il determinante a secondo membro, che indicheremo con $\varphi(y)$, è un determinante simmetrico; talchè l' equazione

$$(3) \qquad \varphi(y) = 0$$

è un' *equazione secolare* (di grado n). Essa ha dunque tutte le sue radici reali ([1]).

Sia ora $x = \rho\,(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$ una radice *complessa* della equazione $f(x) = 0$. In virtù della (2), deve risultare

$$y = \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos\varphi + i\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\operatorname{sen}\varphi$$

una radice della (3), epperò deve aversi $\rho - \frac{1}{\rho} = 0$, e quindi $\rho = 1$.

Con ciò l' asserto resta provato: siamo perciò in grado di enunciare il teorema di Brioschi nella seguente forma, completa ed estremamente concisa:

L' equazione f(x) = 0 *ha tutte le radici di modulo unitario* ([2]).

2. Ad una radice dell' equazione (3), diversa da $+2$ e da -2, corrispondono due radici distinte della $f(x) = 0$, date dalla formula:

$$x = \frac{1}{2}\left(y \pm \sqrt{y^2 - 4}\right).$$

Per $y = \pm 2$, queste due radici si riducono ad una sola: $+1$ o -1 rispettivamente. E poichè (lo abbiamo ricordato in principio)

([1]) Pascal, *I determinanti*, (1923), p. 103.

([2]) La particolarità che presenta l' equazione (1) di essere reciproca, scaturisce dalla proprietà ora enunciata é dall' ipotesi che le a_{ij} sono quantità reali.

le rimanenti radici della (1) sono tutte complesse, detta y una qualunque radice dell' equazione $\varphi(y) = 0$, deve risultare

$$|y| \leq 2.$$

Vogliamo infine far vedere che ogni radice della (3), *interna* all' intervallo $(-2, 2)$ è radice multipla per l' equazione stessa.

Infatti, derivando la (2) rispetto ad x, si ricava

$$2f(x)f'(x) = x^{n-1} \left\{ n\varphi(y) + \left(x - \frac{1}{x}\right)\varphi'(y) \right\}.$$

Ponendo in questa in luogo di x una radice di $f(x) = 0$, diversa da $+1$ e da -1 (e quindi al posto di y la corripondente radice di $\varphi(y) = 0$), si trova senz' altro

$$\varphi'(y) = 0,$$

la quale dimostra l' asserto.

Concludendo, si può enunciare il seguente notevole teorema:

Se $\|a_{nn}\|$ *è un determinante ortogonale ad elementi reali, la equazione secolare*

$$\begin{vmatrix} x + a_{11} & \frac{a_{12} + a_{21}}{2} & \cdots & \frac{a_{1n} + a_{n1}}{2} \\ \frac{a_{21} + a_{12}}{2} & x + a_{22} & \cdots & \frac{a_{2n} + a_{n2}}{2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{a_{n1} + a_{1n}}{2} & \frac{a_{n2} + a_{2n}}{2} & \cdots & x + a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

ha tutte le radici comprese tra -1 *e* $+1$, *inclusi gli estremi. Quelle interne al predetto intervallo risultano necessariamente multiple.*

Napoli, 15 settembre 1927.