Bollettino Unione Matematica Italiana

Giuseppe Vitali

Sulla condizione della integrabilità riemanniana lungo un dato intervallo delle funzioni limitate di una variabile reale

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (1927), n.5, p. 253–257.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_5_253_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1927.

Sulla condizione della integrabilità riemanniana lungo un dato intervallo delle funzioni limitate di una variabile reale.

Nota di GIUSEPPE VITALI (a Padova).

Il dott. CIRO POLI in una sua Nota del 1913 [1] ha dimostrato l'integrabilità riemanniana delle funzioni continue di una variabile in un dato intervallo, senza far ricorso al teorema di CANTOR,

[1] C. POLI, *Sulla dimostrazione dell'integrabilità delle funzioni continue*. (« Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. 49, 1913-14, pagg. 132-4).

servendosi della considerazione degli integrali supero ed infero. Il suo procedimento consiste nel dimostrare dapprima che questi integrali godono della proprietà che l'integrale esteso alla somma di due intervalli è uguale alla somma degli integrali estesi ai singoli intervalli, e nel dedurne che ognuno di detti integrali considerato come funzione dell'estremo superiore ha derivata uguale alla funzione integranda nei punti di continuità di questa funzione. Da ciò si deduce che se la funzione integranda è continua in tutto l'intervallo, i suoi integrali supero ed infero considerati come funzioni dell'estremo superiore hanno derivata uguale in tutto l'intervallo, e quindi sono uguali.

Questo procedimento mi suggerisce un modo spiccio per dimostrare il noto

Teorema di VITALI-LEBESGUE. — Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione limitata di una variabile reale sia integrabile secondo RIEMANN in un dato intervallo è che in questo intervallo sia *generalmente* (¹) continua (²).

La nuova dimostrazione che espongo suppone la nozione di *funzione assolutamente continua* e la conoscenza del seguente

Teorema A). — Si può concludere che una funzione definita in un intervallo è una costante se si sa che nel detto intervallo è assolutamente continua ed ha generalmente derivata nulla (³).

Questo teorema si può facilmente dimostrare fondandosi sopra un Lemma che dimostro nelle mie *Lezioni di Analisi Superiore*, che è una deformazione di un mio Teorema (⁴). Questo Lemma richiede una dimostrazione molto semplice ed io la esporrò alla fine di questa Nota.

1. È facile dimostrare che *un integrale supero (infero) è una funzione assolutamente continua.*

Infatti, prefissato un $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere, è possibile trovare un $\mu > 0$ tale che in ogni aggregato di segmenti le cui lun-

(¹) Cioè all'infuori di un aggregato di misura nulla.

(²) G. VITALI, *Sulla condizione di integrabilità delle funzioni.* (« Bollettino dell'Acc. Gioenia », fasc. LXXIX, 1913).

G. VITALI, *Sulla integrabilità delle funzioni.* (« Rend. del R. Ist. Lomb. di Sc. e Lett. », serie II, vol. XXXVII, 1904, pagg. 69-73).

H. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives.* (Paris, Gauthier-Villars, 1904, p. 29).

(³) G. VITALI, *Sulle funzioni integrali.* (« Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », anno 1904-1905).

(⁴) G. VITALI, *Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali.* (« Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino », anno 1907-08, Cap. I, § 1).

ghezze abbiano una somma $< \mu$ la somma dei moduli degli incrementi dell'integrale supero (infero) in questi segmenti sia $< \varepsilon$. Per questo basta prendere $\mu < \frac{\varepsilon}{M}$, dove M è il limite superiore del modulo della funzione. Infatti l'integrale supero (infero) in un intervallo è $\leq$ del prodotto della lunghezza dell'intervallo per il limite superiore della funzione in esso intervallo.

Ora se la funzione integranda è generalmente continua, i due integrali supero ed infero hanno generalmente derivata uguale, e quindi differiscono per una costante, ma inizialmente hanno valori uguali, e quindi sono uguali.

È così dimostrato che *per l'integrabilità riemanniana di una funzione limitata è sufficiente che essa sia generalmente continua.*

2. Per provare che la condizione è necessaria consideriamo una funzione $f(x)$ che ha un aggregato G di punti di discontinuità di misura > 0. Detta oscillazione della funzione in un punto P il limite inferiore delle oscillazioni della funzione nei varii intorni di P, si vede che i punti di discontinuità di una funzione sono tutti e soli i punti in cui l'oscillazione della funzione è > 0 (nei rimanenti punti questa oscillazione è zero), e quindi esiste un numero positivo η tale che l'aggregato G_η dei punti in cui $f(x)$ ha oscillazione $> \eta$ sia di misura $\mu > 0$. Dividiamo ora l'intervallo di partenza in un numero finito di parti δ_i, quelle di queste parti che contengono punti di G_η sono tali che la somma delle loro lunghezze è $\geq \mu$, in queste l'oscillazione di $f(x)$ è $> \eta$, quindi se D_i è l'oscillazione di f in δ_i si ha

$$\Sigma_i D_i \delta_i \geq \mu \cdot \eta .$$

Ma il 2° membro è costante e > 0, dunque $f(x)$ non è integrabile secondo Riemann. È così dimostrato completamente il Teorema di Vitali-Lebesgue.

3. Passo ora ad enunciare e a dimostrare il Lemma di cui ho parlato nella introduzione.

Lemma. — Se A è un aggregato chiuso di punti di un segmento (a, b), e se μ è la sua misura, se ad ogni suo punto corrisponde almeno un suo intorno destro contenuto in (a, b), è possibile per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ trovare un numero finito di tali intorni a 2 a 2 distinti le cui lunghezze abbiano somma $> \mu - \varepsilon$.

Dim. — Sia Δ l'aggregato degli intorni che corrispondono ai punti di A. Sia α il limite inferiore di $A \cdot O$ α è il minimo o è un punto limite di A, ed in ogni caso appartiene ad A. Se $a < b$, e se x

è un punto di (α, b), indichiamo con μ_x la misura del sub-aggregato dei punti di A che cadono in (α, x). Evidentemente $\mu_b = \mu$. Chiamiamo H l'aggregato dei punti x di (α, b) tali che per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ esiste un numero finito di segmenti di Δ che cadono in (a, x), che sono a 2 a 2 distinti, e le cui lunghezze hanno una somma $> \mu_x - \varepsilon$. Questo aggregato H ha un limite superiore z. Dico che z appartiene ad H. Infatti per ogni ε reale e > 0, esiste un punto y di H la cui distanza da z è $< \frac{\varepsilon}{2}$ ed esiste un numero finito di segmenti di Δ che cadono in (a, y), e quindi in (a, z), che sono a 2 a 2 distinti e le cui lunghezze hanno una somma $> \mu_y - \frac{\varepsilon}{2}$ e quindi $> \mu_z - \varepsilon$, dunque z appartiene ad H. Io dico inoltre che $z = b$, nel qual caso il teorema è manifestamente vero.

Se non fosse $z = b$, e se in (z, b) non vi sono punti di A, tutti i punti di (z, b) sarebbero punti di H, e ciò è assurdo. Se in (z, b) vi sono punti di A, questi avranno un limite inferiore β che apparterrà ad A. Se δ è un segmento di Δ che corrisponde a β, ed u è il suo estremo destro, poichè per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ esiste un numero finito di segmenti di Δ che cadono in (a, z) che sono a 2 a 2 distinti e le cui lunghezze hanno una somma $> \mu_z - \varepsilon$, l'aggregato di tali segmenti e di δ è pure un insieme di un numero finito di segmenti di Δ che sono a 2 a 2 distinti, che cadono in (a, u) e le cui lunghezze hanno somma $> \mu_u - \varepsilon$, e quindi u appartiene ad H, il che è pure assurdo Dunque $z = b$. c. d. d.

Da questo Lemma possiamo dedurre il Teorema $A)$ nel modo seguente:

Sia $f(x)$ una funzione definita in (a, b), $a < b$, assolutamente continua e con derivata generalmente nulla. Prefissato un numero reale $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere, noi possiamo trovare un $\mu > 0$ tale che in ogni aggregato di segmenti, le cui lunghezze abbiano una somma $< \mu$, la somma degli incrementi della f in tali segmenti sia $< \varepsilon$. Se x è un punto di (a, b), posto $l = x - a$, noi possiamo trovare un aggregato A chiuso di punti di (a, x) in cui la f ha derivata nulla, e la cui misura m sia $> l - \mu$, e che non contenga il punto x. Ad ogni punto di A noi possiamo associare un intorno destro che cade in (a, x) e tale che in esso il rapporto incrementale di f sia $< \varepsilon$. Di questi segmenti noi possiamo trovarne un numero finito a 2 a 2 distinti le cui lunghezze abbiano una somma maggiore di $l - \mu$. Chiamo Δ il loro aggregato. Le parti rimanenti di (a, x) formano un aggregato Δ' di segmenti le cui lunghezze hanno una somma $< \mu$. La somma degli incrementi di f nei tratti Δ è in modulo $< \varepsilon$ e la somma degli incrementi di f

nei tratti Δ è in modulo $< \varepsilon \cdot l$. Quindi la somma degli incrementi di f in $\Delta + \Delta'$, cioè $f(x) - f(a)$, è in modulo $< \varepsilon(l+1)$. Ma ε può essere piccolo a piacere, quindi $f(x) = f(a)$, ossia $f(x)$ è costante. c. d. d.