Mauro Picone

Relazioni fra le derivate delle funzioni periodiche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (1927), n.5, p. 251–253.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_5_251_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1927.

Relazioni fra le derivate delle funzioni periodiche.

Nota di MAURO PICONE (a Napoli).

Sia $f(\tau)$ una funzione reale della variabile reale τ, periodica e di periodo $2T$, dotata di tutte quelle derivate, finite e continue, che prenderemo in considerazione. Porremo:

$$a_k^{(p)} = \frac{1}{T}\int_0^{2T} f^{(p)}(\tau)\cos\frac{\pi k \tau}{T}\,d\tau, \quad b_k^{(p)} = \frac{1}{T}\int_0^{2T} f^{(p)}(\tau)\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi k\tau}{T}\,d\tau \quad (k=0, 1, 2,\ldots),$$

intendendo che $f^{(0)}(\tau) \equiv f(\tau)$, $a_k^{(0)} = a_k$, $b_k^{(0)} = b_k$. Si ha, in virtù della periodicità,

$$(a_k^{(p+q)})^2 + (b_k^{(p+q)})^2 = \left(\frac{\pi k}{T}\right)^{2q}[(a_k^{(p)})^2 + (b_k^{(p)})^2] \quad (k=0, 1, 2,\ldots),$$

$$\int_0^{2T}[f^{(p)}(x)]^2 dx = T\sum_{k=1}^{\infty}[(a_k^{(p)})^2 + (b_k^{(p)})^2],$$

quest'ultima relazione valendo anche per $p=0$ se riesce $a_0 = 0$, se cioè $f(\tau)$ ha media nulla. Ne segue:

$$(1)\quad \int_0^{2T}[f^{(p)}(\tau)]^2 d\tau = T\left(\frac{T}{\pi}\right)^{2q}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a_k^{(p+q)})^2 + (b_k^{(p+q)})^2}{k^{2q}} \leqq \left(\frac{T}{\pi}\right)^{2q}\int_0^{2T}[f^{(p+q)}(\tau)]^2 d\tau.$$

anche per $p=0$, se $f(\tau)$ ha media nulla.

Ma, in ogni intervallo che abbia ampiezza $2T$, $f^{(p)}(\tau)$ si annulla in almeno un punto τ_0, si ha dunque:

$$f^{(p)}(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} f^{(p+1)}(x)\,dx,$$

$$[f^{(p)}(\tau)]^2 \leqq |\tau - \tau_0|\int_{(\tau_0,\,\tau)}[f^{(p+1)}(x)]^2 dx \leqq 2T\int_0^{2T}[f^{(p+1)}(\tau)]^2 d\tau,$$

e facendo ricorso alla (1), quando vi si cangi p in $p+1$,

$$[f^{(p)}(\tau)]^2 \leqq 2T\int_0^{2T}[f^{(p+1)}(\tau)]^2 d\tau \leqq 2T\left(\frac{T}{\pi}\right)^{2q}\int_0^{2T}[f^{(p+q+1)}(\tau)]^2 d\tau \leqq$$

$$\leqq 4T^2\left(\frac{T}{\pi}\right)^{2q}[\max|f^{(p+q+1)}(\tau)|]^2,$$

onde segue la proposizione:

I. *Se* f(τ) *è periodica e di periodo* 2T, *fra le sue derivate sussistono le relazioni:*

$$\max |f^{(p)}(\tau)| \leqq 2T\left(\frac{T}{\pi}\right)^q \max |f^{(p+q+1)}(\tau)|, \qquad p \geqq 1, \tag{2}$$

e se f(τ) *è inoltre dotata di zeri, ed in particolare, se ha media nulla, si ha pure:*

$$\max |f(\tau)| \leqq 2T\left(\frac{T}{\pi}\right)^q \max |f^{(q+1)}(\tau)|. \tag{2_0}$$

In particolare, per T = π, *se cioè il periodo è* 2π, *si ricava:*

$$\max |f^{(p)}(\tau)| \leqq 2\pi \max |f^{(p+q+1)}(\tau)|, \qquad p \geqq 1, \tag{3}$$

e se f(τ) *è inoltre dotata di zeri,*

$$\max |f(\tau)| \leqq 2\pi \max |f^{(q+1)}(\tau)|. \tag{3_0}$$

Ne segue:

II. *Alle relazioni* (2) *soddisfa la* f(τ) *se essa fornisce i valori che una funzione* u(x, y) *assume nei punti di una curva analitica semplice e chiusa, priva di punti singolari, del piano* (x, y), *il cui intervallo base, relativo al parametro* τ, *ha ampiezza* 2T, *ed è interna al campo in cui* u(x, y) *è finita e continua con le sue derivate parziali.*

III. *Alle relazioni* (2) *e alle* (2_0) *soddisfa la* f(τ) *se essa fornisce, in funzione dell'arco* τ, *i valori della derivata secondo la normale di una funzione armonica, nei punti di una curva analitica semplice e chiusa, priva di punti singolari, di lunghezza* 2T, *interna al campo di regolarità della* u.

IV. *La* u(x, y) *soddisfi, nel dominio* D, *ad un'equazione lineare e omogenea alle derivate parziali del secondo ordine ellittico-parabolica, priva del termine in* u, *a coefficienti analitici, supposto* D *interno al campo di regolarità della* u *e limitato da un'unica curva analitica semplice e chiusa, priva di punti singolari, di parametro* τ *e di intervallo base di ampiezza* 2T*; detti* f(τ) *i valori che ha* u *assume sulla frontiera di* D, *se essa* u *si annulla in* D, *si ha:*

$$\max.\ \text{in}\ D\ \text{di}\ |u(x, y)| \leqq 2T\left(\frac{T}{\pi}\right)^q \max.\ |f^{(q+1)}(\tau)|.$$

V. *Se il cerchio* C *di centro nel punto* P *è contenuto nel dominio limitato* D, *il quale è interno al campo di regolarità della funzione armonica* u, *detta* θ *l'anomalia rispetto al punto* P, *si ha:*

$$\max.\ \text{in}\ C\ \text{di}\ \left|\frac{\partial^p u}{\partial\theta^p}\right| \leqq 2\pi \times \max.\ \text{su front.}\ D\ \text{di}\ \left|\frac{\partial^{p+q+1} u}{\partial\theta^{p+q+1}}\right|, \qquad p \geqq 1,$$

e se u *è nulla in* C *si ha pure:*

$$\text{max. in } C \text{ di } |u| \leqq 2\pi \times \text{max. su front. } D \text{ di } \left| \frac{\partial^{q+1} u}{\partial \theta^{q+1}} \right| .$$

VI. *Se* f(τ) *ha il periodo minore di* 2π, *il massimo modulo della sua derivata d'ordine* n *è infinitamente grande con* n, *e di ordine non inferiore a quello di un esponenziale.*

L'esempio delle funzioni sen τ e sen $\frac{\tau}{2}$ dimostra che l'ipotesi su cui poggia quest' ultima proposizione è essenziale.

Lasciamo cadere l'ipotesi della periodicità per la funzione $f(\tau)$ e manteniamo quella che ogni sua derivata è dotata di zeri in un certo intervallo fisso $(\tau_0, \tau_0 + 2T)$. Si ha allora, ovviamente, intendendo di prendere i massimi in quell'intervallo,

$$\text{max}\, | f^{(p)}(\tau) | \leqq (2T)^{q+1} \,\text{max}\, | f^{(p+q+1)}(\tau) | . \tag{4}$$

Ebbene, dunque, l'aggiungere l'ipotesi della periodicità per la funzione, col periodo $2T$, consente di ridurre il secondo membro di questa diseguaglianza, moltiplicandolo per il fattore

$$\frac{1}{(2\pi)^q} .$$

Dalla (4) si deduce poi, per esempio, che:

VII. *Se in un intervallo* (a, b) *la* f(τ) *non è costante e le sue derivate d'ordine comunque elevato sono equilimitate, comunque si fissi in* (a, b) *un intervallo* I *di ampiezza minore di uno, fra le derivate di* f *ne deve esistere almeno una che si mantiene in* I *diversa da zero, e se* f(τ) *non è un polinomio ne esistono infinite.*

Napoli, 22 settembre 1927.