
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LUDWIG BERWALD

Sulle trasformazioni puntuali e di contatto nel piano

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 6 (1927), n.5, p. 241-250.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_5_241_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_5_241_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_5_241_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1927.

Sulle trasformazioni puntuali e di contatto nel piano.

Nota di LUDWIG BERWALD (a Praga).

Il BOMPIANI, in una nota recente ⁽¹⁾, ha iniziato una generalizzazione delle sue ricerche anteriori sulla teoria geometrica degli invarianti proiettivi di una curva piana ⁽²⁾ alle trasformazioni pun-

⁽¹⁾ E. BOMPIANI: *Sulle trasformazioni puntuali e di contatto nel piano*. Rend. della R. Acc. dei Lincei, (6)4, 1926, p. 435.

⁽²⁾ E. BOMPIANI: *Invarianti proiettivi di contatto fra curve piane*. Ibid. (6)3, 1926, p. 118. Vedi anche l'appendice II^a alla *Geometria proiettiva differenziale* di G. FUBINI ed E. CECIL. Bologna, 1927.

tuali e di contatto. In questa nota, che pubblico dietro cortese invito del prof. BOMPIANI, mi propongo di far conoscere alcune considerazioni più generali nello stesso indirizzo. Si tratta della costruzione geometrica degli invarianti (infinitesimi e finiti) di una curva piana per certi gruppi continui finiti di trasformazioni puntuali o di contatto nel piano. A questo scopo conviene in primo luogo stabilire alcuni teoremi di carattere geometrico sui limiti di certe aree e birapporti, e poi considerare i corrispondenti invarianti di contatto di due, tre o quattro curve piane per trasformazioni puntuali o di contatto ⁽¹⁾. I risultati finali non sono nuovi, ma seguono immediatamente dalle proposizioni generali di KOWALEWSKI ⁽²⁾. È invece nuova la loro interpretazione geometrica qui data.

1. **Due curve.** — Siano $C, \bar{C}$ due curve (p. es. analitiche) ⁽³⁾ aventi in un loro punto regolare O un contatto di ordine intero $p - 1 > 0$. Le equazioni delle due curve, riferite ad un sistema di coordinate non omogenee (p. es. ortogonali) avente O per origine e la tangente comune delle $C, \bar{C}$ in O per asse delle x , siano:

$$(1) \quad y = \sum_0^{\infty} a_{2+i} x^{2+i}, \quad \bar{y} = \sum_0^{\infty} \bar{a}_{2+i} x^{2+i}.$$

Inoltre consideriamo una retta variabile r , prossima ad O , di equazione:

$$(2) \quad x = a(\varepsilon)y + \varepsilon.$$

⁽¹⁾ Una teoria sistematica (analitica) di tali invarianti si trova nella Memoria di RABUT: *Théorie des invariants universels...*, « Journal de l'École Polytechnique, (2)4, 1898, p. 137.

⁽²⁾ Dai numerosi lavori di questo autore (per lo più nei « Berichte der Sächsischen Akademie » e nella « Mathematische Zeitschrift ») qui citerò soltanto G. KOWALEWSKI: *Grundlegende Sätze der natürlichen Geometrie ebener Transformationsgruppen*. Sächs. Ber. Leipzig 73 (1921), p. 311; *Uebertragung des Trajektorienproblems auf beliebige ebene Transformationsgruppen*. Ibid. 75 (1923), p. 15; *Ueber die Bogen- und Flächenelemente gewisser Gruppentypen der Ebene*. Ibid., p. 81; *Invariante Differentialgleichungen und Differentialinvarianten bei Gruppen ebener Berührungstransformationen*. Ibid., p. 87; *Zur natürlichen Geometrie einer Gruppe von Berührungstransformationen*. Ibid., 76 (1924), p. 15; *Ueber die neuen Methoden zur Berechnung von Differentialinvarianten*. Math. Zeitschr. 21 (1924), p. 39.

⁽³⁾ In realtà basta che alle funzioni qui considerate sia applicabile in un intorno di O la formola di TAYLOR fino all'ordine che sarà necessario considerare. S'intende anche che parliamo di un contatto d'ordine zero nel punto O , se le due curve considerate si tagliano in O senza che coincidano le loro tangenti.

La r seghi C , $\bar{C}$ rispettivamente nei punti P , $\bar{P}$ (prossimi ad O). Facciamo ora tendere la r (con una legge arbitraria) a passare per O , con la sola condizione che la posizione limite sia diversa dalla tangente comune delle due curve in O .

Allora l'area $\frac{1}{2}\Delta$ del triangolo $O\bar{P}P$ è un infinitesimo di ordine $p+1$ in ε . Il termine principale di Δ dipende esclusivamente dalle due curve, ma non dalla posizione limite della retta r . E si ha:

$$(3) \quad \Delta = (a_p - \bar{a}_p)\varepsilon^{p+1} + \dots = \frac{1}{p!}(y^{(p)} - \bar{y}^{(p)})\varepsilon^{p+1} + \dots \quad (1),$$

ove i puntini indicano termini col fattore ε^{p+2} .

2. Tre curve. — Sia O un punto regolare delle tre curve C , $\bar{C}$, $\bar{\bar{C}}$. Le curve C e $\bar{C}$ abbiano in O un contatto di ordine $p-1$, C e $\bar{\bar{C}}$ un contatto di ordine $q-1$; ($p \geq q > 1$; p, q interi). Si consideri una retta variabile r , prossima ad O la quale seghi C , $\bar{C}$, $\bar{\bar{C}}$ rispettivamente nei punti P , $\bar{P}$, $\bar{\bar{P}}$ (prossimi ad O). Sia M un punto preso a piacere sulla r (diverso dai tre considerati) e si formi il birapporto $D = (P\bar{P}\bar{\bar{P}}M)$. Si faccia ora tendere la r (con una legge scelta a piacere) a passare per O , con la sola condizione che la posizione limite sia diversa dalla tangente comune delle tre curve in O ; e pure con legge arbitraria si faccia variare M su di essa, con la condizione che la posizione limite di M sulla posizione limite di r sia diversa da O .

Se le equazioni delle tre curve sono

$$(1^*) \quad y = \sum_0^\infty a_{2+i}x^{2+i}, \quad \bar{y} = \sum_0^\infty \bar{a}_{2+i}x^{2+i}, \quad \bar{\bar{y}} = \sum_0^\infty \bar{\bar{a}}_{2+i}x^{2+i}$$

e l'equazione della retta r è di nuovo la (2) (essendo $(0, 0)$ le coordinate di O), allora il logaritmo del birapporto $D = (P\bar{P}\bar{\bar{P}}M)$ è un infinitesimo di ordine $p-q$ in ε ⁽²⁾. Il termine principale di $\log D$ dipende esclusivamente dalle tre curve, ma non dalle posizioni limiti della retta r e del punto M ⁽³⁾.

(1) Nei §§ 1-3 le $y^{(l)}$ ($\bar{y}^{(l)}$, ...) significano le l -esime derivate delle funzioni y ($\bar{y}$, ...) riguardo ad x nel punto O .

(2) È dunque finito nel caso $p = q$.

(3) Invece del birapporto D (o $\log D$) si potrebbe pure prendere il quoziente delle aree dei triangoli $O\bar{P}P$, $O\bar{\bar{P}}\bar{P}$, nel caso $p = q$, $O\bar{P}P$, $O\bar{\bar{P}}\bar{P}$ nel caso $p > q$.

a) Nel caso $p = q$ il detto birapporto vale

$$(4) \quad D = \frac{a_q - \bar{a}_q}{a_q - \bar{a}_q} + \dots = \frac{y^{(q)} - \bar{y}^{(q)}}{y^{(q)} - \bar{y}^{(q)}} + \dots,$$

ove i termini col fattore ε non sono scritti.

b) Nel caso $p > q$ si trova

$$(5) \quad \log D = \frac{a_p - \bar{a}_p}{a_q - \bar{a}_q} \varepsilon^{p-q} + \dots = \frac{q! \frac{y^{(p)} - \bar{y}^{(p)}}{y^{(q)} - \bar{y}^{(q)}} \varepsilon^{p-q} + \dots}{p!}$$

Nella (5) i termini col fattore ε^{p-q+1} sono trascurati.

3. Quattro curve. — Un risultato affatto simile vale nel caso di quattro curve $C, \bar{C}, \bar{\bar{C}}, \bar{\bar{\bar{C}}}$ aventi O come punto regolare, se supponiamo che $C, \bar{C}$ abbiano in O un contatto di ordine $p-1$, e $\bar{\bar{C}}, \bar{\bar{\bar{C}}}$ tra di loro e colla C un contatto di ordine $q-1$; ($p \geq q$; p, q positivi interi). Si consideri di nuovo una retta variabile r , prossima ad O , la quale seghi $C, \bar{C}, \bar{\bar{C}}, \bar{\bar{\bar{C}}}$ rispettivamente nei punti $P, \bar{P}, \bar{\bar{P}}, \bar{\bar{\bar{P}}}$ (prossimi ad O). Si formi il birapporto $D^* = (P \bar{P} \bar{\bar{P}} \bar{\bar{\bar{P}}})$ e si faccia tendere la r (con una legge arbitraria) a passare per O , con la sola condizione che la posizione limite sia diversa dalla tangente comune (o dalle tangenti) delle quattro curve in O . Le equazioni delle curve $C, \bar{C}, \bar{\bar{C}}, \bar{\bar{\bar{C}}}$ siano:

$$(1^{**}) \quad y = \sum_0^\infty a_{1+i} x^{1+i}, \quad \bar{y} = \sum_0^\infty \bar{a}_{1+i} x^{1+i}, \quad \bar{\bar{y}} = \sum_0^\infty \bar{\bar{a}}_{1+i} x^{1+i}, \quad \bar{\bar{\bar{y}}} = \sum_0^\infty \bar{\bar{\bar{a}}}_{1+i} x^{1+i} \quad (1).$$

Come infinitesimo principale ε si prenda di nuovo l'ascissa del punto ove la retta r incontra la tangente della C .

Allora il logaritmo del birapporto $D^* = (P \bar{P} \bar{\bar{P}} \bar{\bar{\bar{P}}})$ è un infinitesimo di ordine $p-q$ in ε . Il termine principale di $\log D^*$ dipende esclusivamente dalle quattro curve, ma non dalla posizione limite della retta r .

(1) Nella (1**) prendiamo $a_1 = \bar{a}_1 = \bar{\bar{a}}_1 = \bar{\bar{\bar{a}}}_1 = 0$, se $q \geq 2$. Il caso $q=1$ si tratta meglio separatamente; qui, se $p > 1$ prendiamo $a_1 = \bar{a}_1 = 0$. Per tutti i calcoli dei §§ 1-3 si confronti il calcolo del tutto analogo nella nota (2) del BOMPIANI.

E precisamente si trova

a) nel caso $p = q$:

$$(6) \quad D^* = \frac{(a_q - \bar{a}_q)(\bar{a}_q - \bar{\bar{a}}_q)}{(a_q - \bar{a}_q)(\bar{a}_q - \bar{\bar{a}}_q)} + \dots = \frac{(y^{(q)} - \bar{y}^{(q)})(\bar{y}^{(q)} - \bar{\bar{y}}^{(q)})}{(y^{(q)} - \bar{y}^{(q)})(\bar{y}^{(q)} - \bar{\bar{y}}^{(q)})} + \dots,$$

ove i termini col fattore ε sono trascurati;

b) nel caso $p > q$:

$$(7) \quad \log D^* = \frac{(a_p - \bar{a}_p)(\bar{a}_q - \bar{\bar{a}}_q)}{(a_q - \bar{a}_q)(a_q - \bar{a}_q)} \varepsilon^{p-q} + \dots =$$

$$= \frac{q!}{p!} \frac{(y^{(p)} - \bar{y}^{(p)})(\bar{y}^{(q)} - \bar{\bar{y}}^{(q)})}{(y^{(q)} - \bar{y}^{(q)})(\bar{y}^{(q)} - \bar{\bar{y}}^{(q)})} \varepsilon^{p-q} + \dots$$

Qui i termini col fattore ε^{p-q+1} non sono scritti.

Per brevità chiamiamo *fattore caratteristico delle due, tre o quattro curve nel punto O* il fattore di ε^{p+1} , ε^0 rispettivamente ε^{p-q} nei secondi termini delle (3), (7).

4. Trasformazioni puntuali e di contatto. — Ciò stabilito, dimostreremo i seguenti teoremi:

a) Sia O un punto regolare delle due curve $C, \bar{C}$ aventi in O un contatto di ordine intero $p-1 > 0$ e Q il fattore caratteristico delle due curve nel punto O . Allora Qdx^{p+1} è invariante per trasformazioni puntuali unimodulari (cioè aventi il determinante funzionale uno).

b) Sia O un punto regolare delle tre curve $C, \bar{C}, \bar{\bar{C}}$. Le curve C e $\bar{C}$ abbiano in O un contatto di ordine $p-1$, C e $\bar{\bar{C}}$ un contatto di ordine $q-1$; ($p \geq q$; p, q positivi interi). Sia inoltre Q il fattore caratteristico delle tre curve nel punto O . Allora Qdx^{p-q} è invariante per trasformazioni puntuali [di contatto], se $q > 1$ [$q \geq 2$] ⁽¹⁾.

c) Sia O un punto regolare delle quattro curve $C, \bar{C}, \bar{\bar{C}}, \bar{\bar{\bar{C}}}$. Le curve C e $\bar{C}$ abbiano in O un contatto di ordine $p-1$, $p \geq 1$ [$p \geq 2$], $\bar{\bar{C}}, \bar{\bar{\bar{C}}}$ tra di loro e colla C un contatto di ordine zero

⁽¹⁾ Nel seguito le parole nelle grappe [...] si riferiscono sempre alle trasformazioni di contatto.

ordine] ⁽¹⁾. Se Q è il fattore caratteristico delle quattro curve nel punto O , $Qdx^{p-1} [Qdx^{p-2}]$ è invariante per trasformazioni puntuali [di contatto].

I tre teoremi esprimono che nei casi indicati il termine principale di Δ (§ 1) è un invariante infinitesimo di ordine $p+1$ in $\varepsilon = dx$ per trasformazioni puntuali unimodulari e quello di $\log D$ (§ 2), rispettivamente $\log D^*$ (§ 3) è un invariante finito ($p=q$) o infinitesimo ($p>q$) di ordine $p-q$ per trasformazioni puntuali [di contatto]. Nel caso $p=q=1$ il teorema (c) si riduce ad un teorema notissimo per trasformazioni puntuali; nel caso $p=q=2$ il BOMPIANI, l. c., ha dato il teorema (b) per trasformazioni puntuali ed il teorema (c) per trasformazioni di contatto.

Per la dimostrazione consideriamo in primo luogo una *trasformazione puntuale*:

$$(8) \quad X = f(x, y), \quad Y = g(x, y) \quad (2).$$

Allora, se si pone $\frac{d^2y}{dx^2} = y^{(2)}, \quad \frac{d^2Y}{dX^2} = Y^{(2)}$ valgono le

$$(9) \quad \begin{cases} dX = (f_x + y'f_y)dx, \\ Y' = \frac{g_x + y'g_y}{f_x + y'f_y}, \quad Y^{(s)} = \frac{(f_x g_y - f_y g_x)(y^{(s)} + \dots)}{(f_x + y'f_y)^{s+1}}, \quad (s > 1), \end{cases}$$

ove $+\dots$ accenna termini che contengono soltanto le $x, y, y', \dots, y^{(s-1)}$. Dunque si ha per due curve C, C_1 , aventi in comune il punto (x, y) , mentre vi è $y' \neq y'_1$, e per le loro trasformate

$$(10) \quad Y' - Y'_1 = \frac{(f_x g_y - f_y g_x)(y' - y'_1)}{(f_x + y'f_y)(f_x + y'_1 f_y)}.$$

Analogamente è

$$(11) \quad Y^{(s)} - Y_1^{(s)} = \frac{(f_x g_y - f_y g_x)(y^{(s)} - y_1^{(s)})}{(f_x + y'f_y)^{s+1}}, \quad (s > 1),$$

se le curve C, C_1 hanno in comune l'elemento $(x, y, y', \dots, y^{(s-1)})$ d'ordine $s-1$, mentre è $y^{(s)} \neq y_1^{(s)}$ nel punto (x, y) . Dalle (9)-(11) segue subito la parte dei teoremi relativa alle trasformazioni puntuali.

⁽¹⁾ È dunque, nelle supposizioni del § 3, $q=1 [q=2]$. Nel caso $q=1$, $p>1 [q=2, p>2]$ è sottinteso che il differenziale dx si trasformi secondo la (9) [(13)], colla $y'[y'']$ della curva C .

⁽²⁾ Supponiamo che in un intorno del punto (x, y) considerato le $f(x, y), g(x, y)$ siano funzioni analitiche regolari col determinante funzionale $f_x g_y - f_y g_x$ diverso da zero. Analoghe supposizioni, che forse non è necessario scrivere esplicitamente, anche nel caso delle trasformazioni di contatto

Per una *trasformazione di contatto*

$$(12) \quad X = f(x, y, y'), \quad Y = g(x, y, y'), \quad Y' = h(x, y, y')$$

valgono le

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} dX = (f_x + y'f_y + y''f_{y'})dx, \\ Y'' = \frac{h_x + y'h_y + y''h_{y'}}{f_x + y'f_y + y''f_{y'}}, \quad Y^{(t)} = \frac{[h, f]y^{(t)} + \dots}{(f_x + y'f_y + y''f_{y'})^t}, \quad (t > 2), \end{array} \right.$$

ove $+$... accenna termini che contengono soltanto le $x, y, y', \dots y^{(t-1)}$, e

$$(14) \quad [h, f] = h_{y'}(f_x + y'f_y) - f_{y'}(h_x + y'h_y) \neq 0$$

è la parentesi di POISSON di h e f . Se le curve C, C_1 hanno in comune l'elemento del primo ordine (x, y, y') , mentre è $y'' \neq y_1''$ nel punto (x, y) , si ha adesso

$$(15) \quad Y'' - Y_1'' = \frac{[h, f](y'' - y_1'')}{(f_x + y'f_y + y''f_{y'})f_x + y'f_y + y_1''f_{y'}}.$$

Analogamente è

$$(16) \quad Y^{(t)} - Y_1^{(t)} = \frac{[h, f](y^{(t)} - y_1^{(t)})}{(f_x + y'f_y + y''f_{y'})^t}, \quad (t > 2),$$

se le curve C, C_1 hanno in comune l'elemento $(x, y, y', \dots y^{(t-1)})$ di ordine $t-1$, mentre è, nel punto (x, y) , $y^{(t)} \neq y_1^{(t)}$. Dalle (15), (16) risulta anche la parte dei teoremi relativa alle trasformazioni di contatto.

Il metodo precedente è in sostanza già stato adoperato del RABUT e del KOWALEWSKI.

5. Gruppi di trasformazioni. — Nel seguito indichiamo con G_r un gruppo continuo di trasformazioni puntuali [di contatto] a $r > 2$ [$r > 3$] parametri, transitivo negli elementi di ordine $r-2$, vale a dire possedente nessun invariante differenziale assoluto (finito) al disotto dell'ordine $r-1$. Inoltre indichiamo con C una curva, di equazione $y = y(x)$, la quale abbia nel punto considerato (x, y) un elemento di ordine $r-2$ di posizione generale in riguardo al gruppo G_r ⁽¹⁾. Come già si è detto nell'introduzione, le propo-

(1) Con ciò si vuole dire che nessun elemento $(x, y, y', \dots y^{(l)})$ della curva, $0 \leq l \leq r-2$, appartenente all'elemento d'ordine $r-2$ considerato, soddisfaccia ad un'equazione (finita rispettivamente differenziale) invariante per il gruppo.

sizioni seguenti risultano senz'altro da alcuni teoremi del KOWALEWSKI; ma il nostro procedimento dà, nello stesso tempo, una costruzione geometrica degli invarianti che vi figurano.

a) Il gruppo G_r sia un gruppo di trasformazioni puntuali unimodulari ⁽¹⁾, possedente un'equazione differenziale invariante di ordine p ($r-1 > p > 1$):

$$(17) \quad y^{(p)} - \varphi(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}) = 0.$$

Inoltre sia

$$(18) \quad y^{(r-1)} - \chi(x, y, y', \dots, y^{(r-2)}) = 0$$

un'equazione differenziale di ordine $r-1$, invariante per G_r (sempre esistente). Allora le

$$(19) \quad (i_p)^{\frac{1}{p+1}} = (y^{(p)} - \varphi)^{\frac{1}{p+1}} \cdot \varepsilon, \quad (i_{r-1})^{\frac{1}{r}} = (y^{(r-1)} - \chi)^{\frac{1}{r}} \cdot \varepsilon$$

sono due invarianti infinitesimi del primo ordine in ε , dipendenti rispettivamente dagli elementi degli ordini p e $r-1$ della curva C , e

$$(20) \quad I_{r-1} = \frac{i_{r-1}}{(i_p)^{\frac{r}{p+1}}}$$

è un invariante differenziale assoluto (finito) per G_r di ordine $r-1$, lineare in $y^{(r-1)}$ ⁽²⁾.

Se si prende per $\bar{C}$ la curva integrale della (17), rispettivamente della (18), avente, nel punto (x, y) un contatto d'ordine $p-1$, rispettivamente $r-2$ colla C , la dimostrazione della proposizione precedente ed il significato geometrico delle i_p, i_{r-1}, I_{r-1} risultano immediatamente dai teoremi dei §§ 4 (teorema (a)) e 1.

b) Il gruppo G_r possessa oltre l'equazione differenziale invariante (17) di ordine p ancora un'equazione differenziale invariante

(¹) Se il gruppo G_r è dato mediante r trasformazioni infinitesime indipendenti $X_i f = \xi_i \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_i \frac{\partial f}{\partial y}$, questa particolarità è caratterizzata dalle

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x} + \frac{\partial \eta_i}{\partial y} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

(²) $(i_p)^{\frac{1}{p+1}}$ è l'elemento lineare del gruppo (ωdx secondo il KOWALEWSKI).

Per una proposizione del KOWALEWSKI ciascun invariante godente di tutte le proprietà della I_{r-1} ha la forma $aI_{r-1} + b$ (a, b costanti), essendo $r > 2$ [$r > 3$].

di ordine q :

$$(21) \quad y^{(q)} - \psi(x, y, y', \dots, y^{(q-1)}) = 0,$$

con $r-1 > p > q \geq 1$ [$r-1 > p > q > 2$]. Inoltre sia la (18) un'equazione differenziale d'ordine $r-1$, invariante per G_r . Sotto queste condizioni le

$$(22) \quad (i_p)^{\frac{1}{p-q}} = \left(\frac{y^{(p)} - \varphi}{y^{(q)} - \psi} \right)^{\frac{1}{p-q}} \cdot \varepsilon, \quad (i_{r-1})^{\frac{1}{r-1-q}} = \left(\frac{y^{(r-1)} - \chi}{y^{(q)} - \psi} \right)^{\frac{1}{r-1-q}} \cdot \varepsilon$$

sono due invarianti infinitesimi del primo ordine in ε , dipendenti rispettivamente dagli elementi degli ordini p e $r-1$ della curva C , e la

$$(23) \quad I_{r-1} = \frac{i_{r-1}}{(i_p)^{\frac{r-1-q}{p-q}}}$$

è un invariante differenziale assoluto (finito) per G_r di ordine $r-1$, lineare in $y^{(r-1)}$.

Ciò segue dalla proposizione (b) del § 4. Si prende per $\bar{C}$ la curva integrale della (21) avente nel punto considerato un contatto di ordine $q-1$ colla C , e per C' la curva integrale della (17), rispettivamente della (18), avente ivi un contatto d'ordine $p-1$, rispettivamente $r-2$, colla C . i_p rispettivamente i_{r-1} sono, a meno di fattori numerici inessenziali, i termini principali dei corrispondenti birapporti D (§ 2), e risultano così definiti geometricamente nello stesso tempo colla I_{r-1} .

c) Il gruppo G_r sia un gruppo di trasformazioni puntuali possedente due equazioni differenziali invarianti del primo ordine

$$(24) \quad \alpha(x, y)dx + \beta(x, y)dy = 0, \quad \alpha^*(x, y)dx + \beta^*(x, y)dy = 0, \\ (\alpha\beta^* - \beta\alpha^* \neq 0),$$

e un'equazione differenziale invariante (17) di ordine p ($r-1 > p > 1$). Inoltre sia di nuovo la (18) un'equazione differenziale di ordine $r-1$, invariante per G_r . Allora le

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} (i_p)^{\frac{1}{p-1}} &= \left(\frac{(y^{(p)} - \varphi)(\alpha\beta^* - \beta\alpha^*)}{(\alpha + \beta y)(\alpha^* + \beta^* y')} \right)^{\frac{1}{p-1}} \cdot \varepsilon, \\ (i_{r-1})^{\frac{1}{r-1-p}} &= \left(\frac{y^{(r-1)} - \chi}{y^{(p)} - \varphi} \right)^{\frac{1}{r-1-p}} \cdot \varepsilon \end{aligned} \right.$$

sono due invarianti infinitesimi del primo ordine in ε , dipendenti

rispettivamente dagli elementi degli ordini p e $r-1$ della curva C , e la

$$(26) \quad I_{r-1} = \frac{i_{r-1}}{\frac{r-1-p}{(i_p)^{p-1}}}$$

è un invariante differenziale assoluto (finito) per G_r d'ordine $r-1$, lineare in $y^{(r-1)}$.

Una proposizione simile vale anche per i gruppi G_r di trasformazioni di contatto possedenti due equazioni differenziali invarianti del secondo ordine ed inoltre un'equazione differenziale invariante di ordine $p(r-1 > p > 2)$. Ma siccome questo caso non può presentarsi, se il gruppo G_r di trasformazioni di contatto è irriducibile, abbiamo rinunciato a formularla esplicitamente.

La dimostrazione dell'invarianza della i_{r-1} nell'ultima proposizione è la stessa come per la i_{r-1} del teorema precedente. Le rimanenti affermazioni seguono dalla proposizione (c) del § 4, prendendo per $\bar{C}$ la curva integrale della (17) avente colla C , nel punto considerato un contatto di ordine $p-1$, per curve $\bar{C}$, $\bar{C}$ le curve integrali delle (24) passanti per questo punto. Allora i_p è, a meno di fattori numerici inessenziali, il termine principale del corrispondente birapporto D^* (§ 3), e si ha così una definizione geometrica delle i_p e I_{r-1} .

Osservazione. Esiste ancora una seconda interpretazione geometrica degli invarianti considerati nell'ultima proposizione, utilizzando un'altra idea del BOMPIANI ⁽¹⁾.

Le equazioni differenziali (24) definiscono in ciascun punto del piano due direzioni d_1, d_2 . Sia ora C la data curva e $\bar{C}$ la curva integrale della (17), avente nel punto considerato $P(x, y)$ un contatto di ordine $p-1$ colla C . Allora il logaritmo del birapporto delle tangenti alle due curve $C, \bar{C}$ e delle due direzioni d_1, d_2 in $P' = P + dP$ ha — a meno d'un fattore numerico inessenziale, — il termine principale $i_p \varepsilon^{p-1}$, essendo $x + \varepsilon$ l'ascissa di P' . Sostituendo alla curva $\bar{C}$ la curva integrale della (18) avente in P un contatto di ordine $r-2$ colla C , si trova $i_p i_{r-1} \varepsilon^{r-2}$ per il termine principale del corrispondente birapporto (a meno d'un fattore numerico).

Praga, luglio 1927.

⁽¹⁾ Vedasi BOMPIANI: *Costruzione di invarianti proiettivo-differenziali di una superficie*. Rend. della R. Acc. dei Lincei, (6)2, 1925, p. 466 e l'appendice II^a già citata.