Giulio Bisconcini

Variabili casuali continue e loro valori medi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (1927), n.5, p. 233–241.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_5_233_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1927.

PICCOLE NOTE

Variabili casuali continue e loro valori medi.

Nota di GIULIO BISCONCINI (a Roma).

1. Supponiamo esista una corrispondenza biunivoca fra i punti di un segmento e una serie infinita continua di eventi incompatibili. Assunto sulla retta cui appartiene il segmento un sistema di ascisse e dette a, b quelle degli estremi di esso, i valori x appartenenti ad $a \vdash\!\dashv b$ potranno considerarsi come valori di una variabile casuale X messa in corrispondenza biunivoca con la serie delle eventualità considerate e si potrà parlare di probabilità relativa alla variabile X per significare la corrispondente probabilità dell'evento.

2. Suppongasi di saper determinare per ogni assegnato $a \vdash\!\dashv b$ la probabilità che X assuma un valore fra x e $x+h$, ammesso che tale probabilità sia tanto più piccola quanto minore è h e precisamente sia dell'ordine di h, si potrà assumere come probabilità che X abbia un valore compreso fra x e $x+dx$ il prodotto $\mu(x)dx$ ove $\mu(x)$ sarà una funzione positiva, limitata, non nulla in $a \vdash\!\dashv b$. Supposto di più ch'essa sia integrabile in ogni intervallo appartenente ad $a \vdash\!\dashv b$, per l'ammessa incompatibilità dei valori di X, si potrà, applicando il principio della probabilità totale, asserire che, preso un x in $a \vdash\!\dashv b$, la probabilità che X assuma un valore appartenente ad $a \vdash\!\dashv x$ è

$$p(x) = \int_a^x \mu(x)dx,$$

d'onde si trae, supposta $\mu(x)$ continua,

$$\mu(x) = \frac{dp(x)}{dx},$$

la quale relazione definisce la funzione $\mu(x)$ appena sia nota la $p(x)$.

Se si ammette che i soli valori possibili di X siano quelli di $a \vdash\!\dashv b$, essendo certo che tale variabile assume un valore appartenente a questo intervallo, si avrà:

$$\int_a^b \mu(x)dx = 1. \tag{1}$$

3. Se, con ovvia generalizzazione, passando dal discontinuo al continuo, si estende il concetto di valore medio di una variabile casuale [1] al caso che essa sia continua, si ha, indicando con $M[X]$ tale valore medio:

$$M[X] = \int_a^b x\mu(x)dx. \tag{2}$$

Si consideri ora una funzione univalente $f(X)$ della stessa variabile casuale X, la quale sia pure definita per i valori x di $a \vdash\!\dashv b$; sia y il valore che $f(x)$ assume in corrispondeza a un punto di $a \vdash\!\dashv b$ e indichiamo con τ la somma degli intervalli in cui $f(x)$ assume valore compreso fra y e $y + dy$. Per l'ammessa corrispondenza biunivoca che c'è fra X e $f(X)$, la probabilità di tale valore è la stessa della probabilità che X assuma valori x appartenenti a τ, cioè

$$\int_\tau \mu(x)dx,$$

e perciò il valore medio di $f(X)$ in $a \vdash\!\dashv b$ risulterà

$$M[f(X)] = \Sigma f(x) \int_\tau \mu(x)dx,$$

la somma intendendosi estesa a tutti gli intervalli analoghi a τ. Ma poichè $f(x)$ è costante in τ, si può anche scrivere

$$M[f(X)] = \Sigma \int_\tau f(x)\mu(x)dx$$

e, se $f(x)$ è integrabile in $a \vdash\!\dashv b$, ciò equivale a

$$M[f(X)] = \int_a^b f(x)\mu(x)dx. \tag{3}$$

[1] GUIDO CASTELNUOVO, *Calcolo delle probabilità*. Bologna, Zanichelli, vol. I, cap. III.

4. Se, rispetto a un sistema cartesiano Oxy si considera, della curva

$$y = f(x),$$

l'arco i cui estremi hanno le ascisse a, b e si suppone distribuita sulla curva una massa di densità $\mu(x)$, il baricentro G dell'arco ha le coordinate:

$$x_0 = \frac{\int_a^b x\mu(x)dx}{\int_a^b \mu(x)dx}, \quad y_0 = \frac{\int_a^b y\mu(x)dx}{\int_a^b \mu(x)dx},$$

ossia, per la (1):

$$x_0 = \int_a^b x\mu(x)dx, \quad y_0 = \int_a^b f(x)\mu(x)dx,$$

e tenendo conto delle (2) e (3)

$$x_0 = M[X], \quad y_0 = M[f(X)].$$

Supposto che in ogni punto di $a \vdash\dashv b$ la curva sia concava o convessa rispetto al verso positivo dell'asse y, G sarà interno al campo determinato dall'arco e dalla sua corda e quindi, nel primo caso si avrà $y_0 > f(x_0)$, e nel secondo $y_0 < f(x_0)$.

Se ne conclude che, quando in $a \vdash\dashv b$ sia $f''(x) > 0$, è

$$M[f(X)] > f(M[X]), \tag{4}$$

mentre, quando sia $f''(x) < 0$, è

$$M[f(X)] < f(M[X]). \tag{4'}$$

Sono le stesse conclusioni cui si giunge quando X è variabile casuale discontinua [1].

5. Si consideri nel piano cartesiano Oxy un campo chiuso σ, che, per semplicità supporremo convesso, e siano $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$ le equazioni dei lati del rettangolo ad esso circoscritto. Detti A, B, C, D i rispettivi punti di contatto, siano

$$x = \alpha(y), \quad x = \beta(y), \quad y = \gamma(x), \quad y = \delta(x)$$

[1] V. la mia Nota pubblicata nel fasc. 3, anno VI del « Boll. dell'Unione Mat. Ital. ». Cfr. pure una Nota del prof. Monferroni apparsa nel 1° fasc., anno IX, del « Giornale di Mat. finanz. »; di essa ho avuto notizia solo quando la mia era già stata pubblicata.

rispettivamente le equazioni degli archi

$$CAD, \quad CBD, \quad ACB, \quad ADB.$$

Suppongasi che X, Y siano due variabili casuali continue associate entro σ. Con ciò si intende di esprimere che, se X assume un valore $\bar{x}$ di $a \vdash\!\dashv b$ ad esso possano essere associati *tutti e soli* i valori di Y dell'intervallo $\gamma(\bar{x}) \vdash\!\dashv \delta(\bar{x})$ e, analogamente, che, se Y assume un valore $\bar{y}$ di $c \vdash\!\dashv d$ ad esso possano associarsi *tutti e soli* i valori di X dell'intervallo $\alpha(\bar{y}) \vdash\!\dashv \beta(\bar{y})$.

Con ciò si viene a stabilire un legame fra le due variabili X e Y e si viene a dire che i due eventi, da cui dipendono i valori delle variabili, non sono indipendenti.

In caso contrario, cioè quando X e Y sono indipendenti e $a \vdash\!\dashv b$, $c \vdash\!\dashv d$ sono i rispettivi intervalli di variabilità, qualunque valore di X dell'intervallo $a \vdash\!\dashv b$ potrà risultare associato con un generico valore di Y appartenente all'intervallo $c \vdash\!\dashv d$. Allora il campo entro cui risulta definita la coppia X, Y è il rettangolo di lati $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$.

6. Tornando all'ipotesi generale che la coppia X, Y sia definita in un campo qualunque σ (contorno incluso), si considerino in esso due punti (x, y) $(x + dx, y + dy)$ tali che il rettangolino avente i lati paralleli agli assi coordinati e di cui questi due punti sono vertici sia tutto interno a σ. Ammesso che la probabilità che la coppia X, Y assuma come valori le coordinate di un punto qualunque appartenente al suddetto rettangolino sia dell'ordine della sua area $dxdy$, indicando con $\chi(x, y)$ una conveniente funzione positiva, limitata, non nulla entro σ, si potrà rappresentare con $\chi(x, y)dxdy$ la probabilità in questione.

Se σ_1 è una porzione qualunque di σ, la probabilità che la coppia X, Y assuma tutti e soli i valori che corrispondono a punti di σ_1 sarà:

$$p_{\sigma_1} = \int_{\sigma_1} \chi(x, y)dxdy, \tag{5}$$

e, in particolare, poichè è *certo* che ogni coppia di valori di X e Y determina un punto di σ, si avrà:

$$\int_{\sigma} \chi(x, y)dxdy = 1. \tag{6}$$

7. Supponiamo che, considerando X da sola, la probabilità che essa assuma un valore generico compreso nell'intervallo $x \vdash\!\dashv x + dx$

interno ad $a \vdash\!\dashv b$ sia $\mu(x)dx$ e che, analogamente, considerata Y da sola, sia $\mu_1(y)dy$ la probabilità ch'essa assuma un valore qualunque dell'intervallo $y \vdash\!\dashv y + dy$ appartenente a $c \vdash\!\dashv d$.

Se si considera un generico x di $a \vdash\!\dashv b$ e la striscia infinitesima τ interna a σ i cui lati hanno dall'asse y le distanze x e $x + dx$, la probabilità che la coppia X, Y assuma valori in corrispondenza ai punti di questa striscia sarà, a norma della (5),

$$p_\tau = \int_\tau \chi(x, y)dxdy,$$

ossia:

$$p_\tau = dx \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} \chi(x, y)dy.$$

Ma, d'altra parte, questa probabilità coincide con quella che X assuma un generico valore fra x e $x + dx$ e cioè con $\mu(x)dx$, quindi si deduce:

$$\mu(x) = \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} \chi(x, y)dy. \tag{7}$$

Analogamente si dedurrebbe:

$$\mu_1(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \chi(x, y)dx. \tag{8}$$

Come ovvia conseguenza, poichè $\gamma(a) = \delta(a)$ e $\gamma(b) = \delta(b)$, si ha:

$$\mu(a) = \mu(b) = 0, \tag{9}$$

e, analogamente:

$$\mu_1(c) = \mu_1(d) = 0. \tag{10}$$

8. Per il principio di probabilità composta, se X e Y fossero indipendenti, la probabilità $\chi(x, y)dxdy$, di cui s'è detto al n. 6, sarebbe il prodotto della probabilità $\mu(x)dx$ che X assuma un valore dell'intervallo $x \vdash\!\dashv x + dx$ per la probabilità $\mu_1(y)dy$ che Y assuma un valore dell'intervallo $y \vdash\!\dashv y + dy$ e quindi si avrebbe:

$$\chi(x, y) = \mu(x)\mu_1(y).$$

Di qua, tenuto conto che

$$\int_a^b \mu(x)dx = \int_c^d \mu_1(y)dy = 1.$$

si deduce subito

$$\int_c^d \chi(x, y)dy = \mu(x),$$

$$\int_a^b \chi(x, y)dx = \mu_1(y),$$

relazioni che fanno riscontro, per il caso attuale, alle (7) e (8) del caso generale. Si badi però che non sono più vere necessariamente le (9) e (10) ma, in loro vece sussistono le relazioni:

$$\mu(a) = \int_c^d \chi(a, y)dy, \quad \mu(b) = \int_c^d \chi(b, y)dy,$$

$$\mu_1(c) = \int_a^b \chi(x, c)dx, \quad \mu_1(d) = \int_a^b \chi(x, d)dx.$$

9. Veniamo ora alla valutazione dei valori medi delle due variabili casuali associate X e Y. Il valore medio $M[X]$ di X entro $a \vdash\!\dashv b$ sarà

$$M[X] = \int_a^b x\mu(x)dx,$$

che si può scrivere, in virtù della (7):

$$M[X] = \int_a^b x\left(\int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} \chi(x, y)dy\right) dx = \int_a^b dx \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} x\chi(x, y)dxdy,$$

e, in definitiva:

$$M[X] = \int_\sigma x\chi(x, y)dxdy.$$

Analogamente

$$M[Y] = \int_\sigma y\chi(x, y)dxdy.$$

Nel secondo membro della prima si riconosce il valore medio $M_\sigma[X]$ di X entro σ, in quanto l'integrale risulta come limite di somma dei prodotti dei valori x che X può assumere entro σ per le probabilità $\chi(x, y)dxdy$ che tali valori corrispondano a punti dei rettangolini in cui σ può essere al solito modo decomposto. Analogamente dicasi del secondo membro dell'altra formula. Si ha così:

$$M_\sigma[X] = M[X], \quad M_\sigma[Y] = M[Y],$$

relazioni che danno luogo al notevole enunciato:

Se in una superficie piana chiusa σ sono associate due variabili casuali X, Y, *il valore medio di ciascuna di esse in σ coincide col valore medio che la variabile ha entro l'intervallo massimo in cui le è consentito di variare.*

Conviene, per il seguito, tenere presente le due formule:

$$(11) \qquad \begin{aligned} M_\sigma[X] &= \int_\sigma x\chi(x, y)dxdy, \\ M_\sigma[Y] &= \int_\sigma y\chi(x, y)dxdy. \end{aligned}$$

10. Come conseguenza si verifica che:

Il valore medio entro σ della somma di due variabili casuali associate (in σ) è uguale alla somma dei loro valori medi in σ.

Invero la probabilità che la somma $X + Y$ assuma un valore $z = x + y$ ottenuto sommando le coordinate di un punto del rettangolino tutto interno a σ avente per vertici opposti (x, y), $(x + dx, y + dy)$ è la somma delle probabilità relative ai rettangolini che cadono internamente alla porzione della striscia τ interna a σ compresa fra le rette $x + y = z$, $x + y = z + dz$, cioè

$$\int_\tau \chi(x, y)dxdy.$$

Quindi sarà

$$M_\sigma[X + Y] = \Sigma z \int_\tau \chi(x, y)dxdy,$$

e, siccome z è costante in τ, si può anche scrivere

$$M_\sigma[X + Y] = \Sigma \int_\tau (x + y)\chi(x, y)dxdy.$$

Poichè la somma è estesa a tutte le striscie, analoga a quella considerata, in cui si può dividere il campo σ, il secondo membro è un integrale esteso a σ e si ha:

$$M_\sigma[X + Y] = \int_\sigma (x + y)\chi(x, y)dxdy.$$

Scindendo il secondo membro nella somma di due integrali e tenendo conto delle (11), si giunge al risultato che si voleva provare:

$$M_\sigma[X + Y] = M_\sigma[X] + M_\sigma[Y].$$

Riesce di verifica immediata che, se X e Y sono indipendenti, e quindi $\chi(x, y) = \mu(x)\mu_1(y)$, si ha

$$M_\sigma[XY] = M_\sigma[X] \cdot M_\sigma[Y].$$

11. Sia $f(X, Y)$ una funzione univalente delle due variabili casuali associate, definita entro lo stesso campo σ in cui sono definite X, Y, e sia z il valore assunto da $f(x, y)$ in corrispondenza a un punto di σ. Considerata la porzione τ della striscia delimitata dalle curve $f(x, y) = z$, $f(x, y) = z + dz$, la quale rimane interna a σ, la probabilità che $f(X, Y)$ assuma il valore z è, per il principio di probabilità totale esteso al continuo,

$$\int_\tau \chi(x, y) dx dy.$$

Considerato diviso il campo σ in striscie analoghe a τ, il valore medio di $f(X, Y)$ sarà

$$M_\sigma[f(X, Y)] = \Sigma z \int_\tau \chi(x, y) dx dy$$

e in definitiva

$$M_\sigma[f(X, Y)] = \int_\sigma f(x, y)\chi(x, y) dx dy.$$

12. Se si considera la superficie

$$z = f(x, y)$$

e, nella porzione che si proietta in σ, si suppone data una distribuzione continua di massa di densità $\chi(x, y)$, il baricentro G della parte considerata di superficie ha le coordinate:

$$x_0 = \frac{\int_\sigma x\chi(x, y) dx dy}{\int \chi(x, y) dx dy}, \quad y_0 = \ldots, \quad z_0 = \ldots,$$

e, tenendo conto della (6):

$$x_0 = \int_\sigma x\chi(x, y) dx dy, \quad y_0 = \int_\sigma y\chi(x, y) dx dy, \quad z_0 = \int_\sigma z\chi(x, y) dx dy.$$

Queste formule, in virtù delle (11), (12), (13), possono anche scriversi:

(14) $$x_0 = M_\sigma[X], \quad y_0 = M_\sigma[Y], \quad z_0 = M_\sigma[f(X, Y)].$$

13. Se accade che la superficie sia, in tutta la porzione che si proietta nell'area σ, concava verso l'alto, il baricentro G risulta più alto del punto della superficie che ha le stesse coordinate x_0, y_0 di G, e cioè si ha $z_0 > f(x_0, y_0)$, il che può scriversi, per le (13), (14)

(15) $$M_\sigma[f(X, Y)] > f(M_\sigma[X], \; M_\sigma[Y]).$$

Se invece la superficie fosse concava verso il basso si avrebbe

(16) $$M_\sigma[f(X, Y)] < f(M_\sigma[X], \; M_\sigma[Y]).$$

È noto che, se $H(x, y)$ è l'hessiano della $f(x, y)$, quando sia $H(x, y) > 0$ in tutto σ, la superficie è, in tutta la porzione che si proietta in σ, concava rispetto al verso positivo dell'asse z o convessa, secondo che si ha rispettivamente $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ o > 0. Nel primo caso sarà verificata la (15), nell'altro la (16).

È quasi superfluo osservare che, essendo le precedenti condizioni solo sufficienti perchè la superficie sia concava o convessa nel senso precisato, potrebbe darsi che, pur non essendo soddisfatte, la condizione geometrica fosse lo stesso verificata. Così accade talvolta quando $H(x, y) = 0$. Ad es. per il cilindro parabolico

$$z = (x + y)^2$$

tangente al piano xy lungo la retta $x + y = 0$, è ovunque $H = 0$, ma, siccome esso è concavo verso l'alto, si può ancora concludere che

$$M_\sigma[(X + Y)^2] > (M_\sigma[X] + M_\sigma[Y])^2.$$