UMI

Recensioni

* F. Severi: Trattato di geometria algebrica
* N. E. Nörlund: Leçons sur les séries d'interpolation
* A. V. Vasiljef: Numero intero
* J. L. Coolidge: Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung
* M. Lecat: Coup d'œil sur la théorie des déterminants supérieurs dans son état actuel
* G. Cassinis: Calcoli numerici, grafici e meccanici

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (1927), n.4, p. 211–226.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_4_211_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1927.

RECENSIONI

F. Severi: *Trattato di geometria algebrica* (vol. I, parte 1ª - *Geometria delle serie lineari*. N. Zanichelli. Bologna).

Con questo volume il Severi inizia la pubblicazione di un ampio trattato nel quale si propone di « raccogliere, coordinare e completare ove occorra, quanto di importante vi è nel campo della Geometria Algebrica ».

Il volume è dedicato alla geometria sopra una curva (algebrica irriducibile), all'insieme cioè delle proprietà della curva che rimangono immutate (invarianti) attraverso trasformazioni birazionali. Esso si distacca notevolmente dalle *Lezioni di Geometria Algebrica* e dalle *Vorlesungen über algebraische geometrie* dello stesso autore, perchè buona parte della materia vi è trattata in modo originale e il tutto è presentato sotto la veste completa di un trattato.

Le varie questioni sono sviluppate con assoluto rigore scientifico. Il Severi, come avverte in prefazione, si è proposto di sfatare la leggenda che in geometria algebrica la mancanza di rigore e di determinatezza sia quasi una necessità. Lo scopo è stato pienamente raggiunto e ciò sarà certamente accolto con favore dai cultori di questo che è uno dei più bei rami della matematica e segna, senza dubbio, una delle glorie maggiori dell'attività scientifica italiana di quest'ultimo mezzo secolo.

E conviene subito aggiungere che il rigore non appesantisce affatto la trattazione. Come il suo maestro Corrado Segre, il Severi ha la forma chiara ed incisiva. In pochi tratti penetra la parte centrale di ogni questione, riuscendo ad interessare e spesso a trascinare con facilità il lettore nelle sue deduzioni.

Notevole è poi il contributo personale dell'A. ai vari argomenti e sarà certo difficile parlarne compiutamente, in una recensione di poche pagine, quale si conviene al « Boll. dell' U. M. I. «.

Gli argomenti fondamentali dell'opera sono due: *La geometria delle serie lineari e quella delle corrispondenze fra i punti di due* *curve distinte o sovrapposte.* Essi sono però preceduti da alcune nozioni introduttorie e da un capitolo sui sistemi lineari di curve piane. Nelle prime pagine dell' introduzione risalta subito una elegantissima e quanto mai semplice dimostrazione del teorema fondamentale delle funzioni simmetriche delle radici di una equazione algebrica, dedotto come immediata applicazione del teorema concernente la razionalità di una funzione algebrica uniforme.

Seguono poi le definizioni e le prime proprietà delle trasforzioni birazionali e delle curve sghembe ed iperspaziali.

Nel primo capitolo, dopo le ordinarie proprietà sui sistemi lineari di curve piane, l'A. dimostra il teorema di LÜROTH e ne deduce la proprietà che caratterizza i sistemi lineari come sistemi algebrici d'indice uno.

Il resto del capitolo è dedicato ai due notissimi teoremi del BERTINI sui sistemi lineari.

Il primo di questi teoremi è dedotto da una importante proprietà differenziale di una curva piana variabile, dotata di punti multipli variabili, proprietà della quale il SEVERI pel primo ha fatto uso sistematico e che permette all'A. di ricavare facilmente la prima formula di PLÜKER relativa alla classe di una curva e quella di STEINER relativa al numero delle normali ad una curva uscenti da un punto dato del suo piano. La formula di STEINER viene più tardi (cap. IV) completata dall'A. con la determinazione, dal punto di vista funzionale, del gruppo dei punti formato dai piedi di dette normali.

Col capitolo secondo s' inizia lo studio delle serie lineari. Le proprietà fondamentali di tali serie sono state scoperte per via trascendente da RIEMANN, CLEBSCH e WEIERSTRASS. Dal punto di vista algebrico è classica la trattazione di BRILL-NOETHER, perfezionata ed in alcuni punti completata dai geometri della scuola italiana. Nota è pure una trattazione di carattere algebrico geometrico iniziata dal SEGRE e metodicamente sviluppata dal CASTELNUOVO.

Lo studio delle serie lineari nel nostro volume è però condotto con *metodo originale* che l'A. chiama « metodo rapido ».

Tuttavia come diremo meglio in seguito, il SEVERI non tralascia di esporre negli ultimi due capitoli le linee essenziali dei due ricordati metodi algebrici e si riserva di svolgere la trattazione trascendente nel prossimo volume.

Come è noto, la teoria delle serie lineari s' impernia sui seguenti capisaldi:

a) nozione e proprietà dei rami di una curva algebrica;

b) unicità della serie lineare completa che contiene totalmente una serie data;

c) serie jacobiana;

d) completezza della serie staccata sopra una curva piana (fuori dai punti multipli) dal sistema delle sue aggiunte d' ordine qualunque.

Da quest' ultima proprietà seguono poi il teorema di RIEMANN-ROCH, il teorema di CLIFFORD che insieme alle proprietà delle curve canoniche e al teorema delle lacune si può dire costituiscono il culmine della teoria.

Dopo le prime proprietà delle serie lineari e delle corrispondenti immagini proiettive (cap. 2. § 1 ([1])), il SEVERI *costruisce in modo semplicissimo sopra una curva qualunque una serie lineare* g_n^r *di dimensione* r *ed ordine* n, *assolutamente semplice nel senso che, ogni* g_m^{r-1} *in essa contenuta e priva di punti fissi, sia di ordine* m *eguale ad* n *oppure ad* $n-1$ *mai però inferiore* ($m \geqq n-1$).

L' immagine proiettiva della curva data con tale g_r^n è priva di punti multipli.

In tal modo il SEVERI riesce a trasformare una curva qualunque in un' altra priva di punti singolari senza nulla conoscere della natura e della composizione dei punti multipli ed ancor prima di aver definito il genere e la serie canonica della curva.

([1]) Nello stesso primo paragrafo del Cap. II sono contenute importanti osservazioni dell' A. finora sfuggite alla considerazione dei geometri e che mette conto di rilevare. Una serie g_n^r (semplice) di una curva C può essere contenuta parzialmente in una serie g_{n+h}^r $(h > 0)$ della stessa dimensione e senza *punti fissi*. In tal caso però (pel teorema del resto, g_{n+h}^r non può essere completa e perciò deve essere totalmente contenuta in una g_{n+h}^ρ con $\rho > r$.

Se $\rho > r+1$ è possibile considerare una $g_{n+h}^{r'}$ contenuta in g_{n+h}^ρ e contenente g_{n+h}^r e quindi g_n^r $(\rho > r' > r)$.

Dette Γ e Γ' le immagini proiettive di C con g_n^r e $g_{n+h}^{r'}$ la curva Γ non è proiezione di Γ'.

Es. Una conica Γ non è proiezione di una quartica gobba di seconda specie (razionale) e senza punti doppi Γ' nonostante siano in corrispondenza birazionale e la g_2^2 staccata su Γ dalle rette del suo piano sia parzialmente contenuta nella g_4^3 secata su Γ' dai piani dello spazio. È possibile dunque avere sopra una curva C una g_n^r (semplice) parzialmente contenuta in una g_{n+h}^{r+k} $(k, h > 0)$ senza che l'immagine proiettiva di C con g_n^r si possa ottenere come proiezione dell'immagine proiettiva di C con g_{n+h}^{r+k}. In tal caso però g_{n+h}^{r+k} è *necessariamente* incompleta.

In altri termini l'A. riesce a svincolare lo scioglimento dei punti singolari dalla teoria delle singolarità. E così Egli arriva rapidamente alla nozione di rami, ai corrispondenti sviluppi in serie di PUISEUX e alla multiplicità d'intersezione tra ramo e ramo nel caso piano, ramo e forma (ipersuperficie) nel caso iperspaziale.

L'esposizione del soggetto nel trattato si attiene alla ulteriore semplificazione che io ho potuto apportare al metodo primitivamente esposto dall'A.

L'idea di sciogliere le singolarità di una curva senza penetrare, anzi ignorando la natura più o meno complicata di esse, *mediante la costruzione sulla curva piana di una* g_r^n *assolutamente semplice*, è un'idea brillante del SEVERI, feconda anche di notevoli applicazioni in altri rami della geometria.

Applicata alle superficie, mi ha permesso per es., di aggiungere alle note dimostrazioni di BEPPO LEVI e di CHISINI, una più rapida ed elegante dimostrazione dello scioglimento delle singolarità di una superficie algebrica. Problema difficile e le cui alterne vicende, come è noto, hanno tanto occupato i geometri da NOETHER in poi.

L'idea centrale di quest'altra dimostrazione si deve perciò e giustamente far risalire al SEVERI.

Noto pure che, a mio parere, lo stesso procedimento, allo stato attuale della scienza, segna anche la via migliore da tentare per la risoluzione del problema analogo, ed altrettanto fondamentale, per le varietà algebriche in generale.

Lo scioglimento delle singolarità di una curva ha grande importanza anche dal punto di vista analitico, giacchè esso equivale a dimostrare la possibilità di rappresentare (sviluppare) le soluzioni di una equazione algebrica irriducibile $f(x, y) = 0$ nell'interno di un suo punto qualunque (a, b), con un numero finito di serie di potenze intere ascendenti di un parametro t:

$$\begin{aligned} x &= a + a_1 t + a_2 t^2 + \dots \\ y &= b + b_1 t + b_2 t^2 + \dots \end{aligned}$$

o, ciò che fa lo stesso, con serie di potenze ascendenti di $(x - a)^{\frac{1}{\nu}}$, con ν intero:

$$y - b = \alpha_1 (x - a)^{\frac{1}{\nu}} + \alpha_2 (x - a)^{\frac{2}{\nu}} + \dots,$$

proprietà queste che il SEVERI, col suo metodo, riesce a dimostrare con tutta facilità nello stesso capitolo II, non appena ottenuto lo scioglimento delle singolarità.

Al teorema *b*) il SEVERI arriva considerando il quoziente o la somma di due funzioni razionali del punto della curva aventi lo stesso gruppo di poli, concetto questo che risale in sostanza a RIEMANN, ma la cui spontanea aderenza alla trattazione puramente algebrica è stata posta in rilievo, benchè sotto forma diversa (che del resto l'A. espone) dall' ENRIQUES.

La dimostrazione è molto semplice e riesce a liberare il teorema *b*) dalle considerazioni estranee dalle quali ordinariamente solevasi far dipendere (teorema $Af + B\varphi$ nel metodo di BRILL-NOETHER, rigate algebriche nel metodo di SEGRE-CASTELNUOVO).

Essa presenta inoltre il vantaggio di potersi trasportare inalterata ai sistemi lineari di curve di una superficie e ai sistemi lineari di V_{k-1} di una V_k.

L' immagine proiettiva delle serie lineari complete conduce l'A. alla definizione e alle proprietà delle curve normali e, in particolare, delle curve normali razionali.

Nello stesso capitolo sono poi studiati le proprietà dell' equivalenza fra gruppi di punti ([1]), le corrispondenti operazioni di somma e differenza, il famoso teorema del resto (sotto forma invariantiva) e infine il concetto di gruppi e serie lineari *virtuali*. Concetto questo che è stato introdotto dall'A. e la cui estensione risulta tanto importante in varii argomenti della geometria delle superficie.

Nel capitolo IV l'A. introduce, con l' ENRIQUES, il concetto di serie jacobiana, che sviluppato con tutto il rigore analitico (secondo una trattazione del DE FRANCHIS), conduce con facilità alla definizione e all' invarianza del genere e della serie canonica della curva.

Fra le applicazioni che ne seguono citiamo la 2^a e la 3^a formula di PLÜCKER, quelle di CAYLEY, di VERONESE e SEGRE, relative alle curve gobbe ed iperspaziali e infine la determinazione dal punto di vista funzionale (SEVERI) e dal punto di vista numerativo (BRILL) del gruppo dei punti $(r+1)$-*upli* di una g_n^r.

Al teorema *d*) il SEVERI arriva dando veste geometrica alla nota definizione analitica di WEIERSTRASS del genere di una curva; dimostra cioè direttamente che affinchè sopra una curva un *qualunque gruppo di* n *punti* appartenga ad una serie lineare *infinita* è che n non scenda al disotto di un certo limite ≥ 1. Detto $p'+1$ tale limite, il numero p' risulta il genere della curva secondo la definizione di WEIERSTRASS.

([1]) Due gruppi A e B di punti di una curva si dicono equivalenti e si scrive $A \equiv B$, quando essi sono totalmente contenuti in una stessa serie lineare.

Profittando poscia di un noto lemma di CASTELNUOVO sulla serie minima contenente certe serie lineari, dimostra che il numero p' coincide col genere p precedentemente definito alla maniera di CLEBSCH $\left| p' = p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d \right|$ e quindi arriva rapidamente al teorema d) che gli altri autori sogliono dedurre o dal teorema $Af + B\varphi$ di NOETHER o dal teorema di RIEMANN-ROCH, dimostrato alla maniera di CASTELNUOVO.

Dal teorema d) seguono:

il celebre teorema di RIEMANN-ROCH, il teorema di CLIFFORD, le importanti proprietà della serie canonica e delle corrispondenti curve canoniche.

Chiudono il capitolo, che è certamente il più importante e il più conclusivo della teoria delle serie lineari, il teorema delle lacune, la nozione di punti di WEIERSTRASS [1] e la determinazione di un limite inferiore del numero dei punti di WEIERSTRASS *distinti* appartenenti alla curva.

Crediamo così di avere esposto per sommi capi le linee essenziali del metodo che conduce l'autore ad una rapida e quanto mai elegante costruzione delle serie lineari.

Ma il SEVERI non si contenta della costruzione fatta e nel cap. VIII sviluppa gli elementi fondamentali della classica trattazione algebrica di BRILL-NOETHER. Questo metodo ha interesse *non solo dal punto di vista storico, ma anche perchè muove da* concetti che trovano feconde applicazioni in altri rami della geometria. Questi concetti cono:

1°) Generalità sulle trasformazioni cremoniane piane, in particolare sulle trasformazioni quadratiche (§ 1).

2°) Studio (secondo NOETHER, HAMBURGER, BERTINI) delle singolarità di una curva mediate l'applicazione di successive trasformazioni quadratiche, che oltre alla riduzione delle singolarità della curva a punti multipli ordinari, conducono alla importante nozione di NOETHER di punti multipli infinitamente vicini e alla conseguente composizione di un punto multiplo di una curva (§ 2). Concetto questo che, com'è noto, è stato recentemente completato dall'ENRIQUES mediante le importanti nozioni di punti multipli *infinitamente vicini e liberi* e di punti *satelliti* di punti liberi.

[1] Un punto M di una curva di genere p, chiamasi punto di WEIERSTRASS della curva quando esiste una funzione razionale dei punti della curva di ordine $n \leq p$, avente il punto M come unico polo, in altri termini quando il punto M contato n volte, appartiene ad una serie lineare infinita d'ordine n.

3°) Il celebre teorema $Af + B\varphi$ di NOETHER (§ 3) (colle semplificazioni ed i complementi che l'A. vi ha apportato) dal quale facilmente seguono (§ 4) una forma proiettiva del teorema del resto, i teoremi *b*) e *d*) e successivamente gli altri di RIEMANN-ROCH, CLIFFORD etc.

Per ragioni analoghe, nel cap. VII sono date le linee essenziali del metodo iperspaziale per lo studio delle serie lineari come è stato svolto da SEGRE e CASTELNUOVO. Anche questo metodo, come avverte l'A., rientra nel quadro algebrico geometrico, ma ha carattere spiccatamente sintetico. I punti fondamentali sono: una dimostrazione iperspaziale dovuta al SEGRE del teorema *b*) ed una dimostrazione del teorema di RIEMANN-ROCH dovuta al CASTELNUOVO e fondata sulla formula di SCHUBERT che esprime il numero dei gruppi di $r+1$ punti comuni ad una g_n^r ed a una g_m^1 (formula che CASTELNUOVO dimostra direttamente).

I tre metodi: quello « rapido » del SEVERI, quello algebrico di BRILL-NOETHER e quello iperspaziale di SEGRE-CASTELNUOVO differiscono nel modo diverso di sciogliere le singolarità di una curva ed in quello di ottenere il teorema *d*) o il teorema di RIEMANN-ROCH.

Ognuno comprende quali vantaggi può trarre lo studioso dal confronto dei tre metodi, per una esatta valutazione dei punti cardinali della teoria. Non bisogna dimenticare che il volume è anche dedicato ai nostri giovani del secondo biennio di matematica.

***

La trattazione della teoria delle corrispondenze è sviluppata con ampiezza maggiore dell'ordinaria, perchè il SEVERI al quale si deve, attraverso ad una classica memoria del 1903, la prima costruzione geometrica completa della teoria delle corrispondenze, ha in questo trattato voluto altresì fissare il valore dei principi di corrispondenza in relazione alla molteplicità dei punti uniti.

Il capitolo delle corrispondenze è poi quello che maggiormente rileva il contributo personale dell'autore.

Al SEVERI si debbono infatti: la nozione di riducibilità ed irriducibilità di una corrispondenza;

il concetto di somma di corrispondenze, che metodicamente sviluppato conduce in modo più rapido e più semplice al principio per le corrispondenze a valenza e al suo significato funzionale trovato per la prima volta da HURWITZ, per via trascendente e poi dal SEVERI per via geometrica;

il teorema dell'invarianza delle relazioni di equivalenza fra gruppi di punti di fronte alle corrispondenze algebriche;

il significato funzionale della formula di ZEUTHEN nel caso generale ed alcune importanti riflessioni critiche sulla stessa formula;

il modo di computare — come si è detto — i punti uniti in ogni relazione di equivalenza nella quale intervenga il loro gruppo;

la sistematica considerazione delle corrispondenze con punti multipli variabili (sempre trascurate);

il concetto di corrispondenza a più valenze che ulteriormente esteso ha arricchito la teoria dei noti ed importanti risultati del ROSATI.

Al SEVERI si debbono ancora:

un criterio di equivalenza per i gruppi di una γ_m^1 [1];

la nozione di corrispondenza complementare;

il concetto e la determinazione del grado e del genere di una corrispondenza;

la caratterizzazione numerativa delle corrispondenze a valenza etc.

Il capitolo delle corrispondenze è diviso in tre paragrafi:

1°) *Trasformazioni birazionali di una curva in sè* dedicato: al teorema di SCHWARZ-KLEIN sul numero finito di corrispondenze birazionali fra i punti di una stessa curva di genere $p > 1$: al concetto dei moduli di una curva (numero dei parametri essenziali dai

[1] Vale la pena di raccogliere qui i principali criteri geometrici di equivalenza per i gruppi di punti di una serie algebrica γ_n^1 di punti di una curva (in ordine cronologico):

1) SEVERI: Se i gruppi di νn punti di una γ_n^1 di indice ν, uscenti dai punti della curva sono equivalenti, tali sono anche i gruppi della γ_n^1. Criterio che ha tanta parte nella importantissima determinazione fatta da CASTELNUOVO e SEVERI del numero degli integrali semplici, indipendenti, di prima specie appartenenti ad una superficie algebrica.

2) SEVERI: Se i multipli secondo un intero k dei gruppi di una γ_n^1 sono equivalenti, tali sono i gruppi della γ_n^1.

3) ENRIQUES: Se una γ_n^1 è razionale, i suoi gruppi corrispondono cioè biunivocamente ai valori di un parametro λ, essi sono equivalenti,

4) CASTELNUOVO: Il numero dei punti doppi di una γ_n^1 d'indice ν sopra una curva di genere p verifica la relazione: $d \leq 2\nu(n+p-1)$ il segno $=$ valendo allora e allora soltanto che i gruppi della γ_n^1 sono equivalenti.

Posto: $2z = 2\nu(n+p-1) - d$ il numero z (detto da R. TORELLI difetto di equivalenza della serie) ricorre spesso nello studio delle serie algebriche appartenenti ad una curva, e ad esso sono legati importanti lavori di TORELLI, COMESSATTI, CASTELNUOVO, ROSATI.

quali dipende la famiglia delle curve di genere p birazionalmente distinte fra loro) e loro determinazione per le curve ellittiche ed iperellittiche e infine allo studio delle corrispondenze birazionali che trasformano in sè una curva ellittica (generale o singolare).

2°) *Corrispondenze d' indici qualunque fra due curve distinte o sovrapposte.* In questo paragrafo l' autore sviluppa: le proprietà generali delle corrispondenze; il significato di valenza (positiva, negativa o nulla); il concetto di corrispondenza inversa; i concetti di somma e di prodotto, calcolando le relative valenze; l' estensione del concetto di valenza con la considerazione delle corrispondenze dipendenti; la formula di ZEUTHEN e le sue conseguenze, e infine i principi di corrispondenza, determinazione cioè dal punto di vista funzionale e dal punto di vista numerativo, del gruppo di punti unito di una corrispondenza fra i punti di una curva. Principii successivamente dovuti a CHASLES (curve razionali), CAYLEY-BRILL (corrispondenze e valenza positiva o nulla su una curva qualunque) ed infine ad HURWITZ nel caso generale.

3°) *Applicazioni della teoria delle corrispondenze* dedicato alle formule di JONQUIÈRES e SCHUBERT, all' importante criterio aritmetico di CASTELNUOVO (4) per riconoscere se i gruppi di una γ_n^1 sono equivalenti, alla definizione e determinazione del grado di una corrispondenza e sue applicazioni al teorema di PAINLEVÈ-HUMBERT-CASTELNUOVO sulla inesistenza, sopra una curva algebrica, di una infinità continua di involuzioni irrazionali e successivo teorema di HUMBERT-CASTELNUOVO sulla linearità delle involuzioni più volte infinite appartenenti ad una curva algebrica.

Chiude il capitolo la importantissima nozione di varietà di JACOBI relativa ad una curva data, donde deriva una *nuova* dimostrazione del predetto teorema di PAINLEVÈ-HUMBERT-CASTELNUOVO.

***

Aggiungiamo che alla fine di ogni paragrafo le notizie storiche sono curate con molta precisione e le citazioni sono fatte con vero scrupolo. Da esse il lettore può formarsi una chiara visione del lento ma continuo progredire della scienza e dell' importante contributo, che, a questo ramo della matematica, ha dato la scuola italiana del CREMONA.

E concludiamo che con il trattato di ENRIQUES-CHISINI e con questo volume del SEVERI, la geometria algebrica, nel giro di pochi anni si è arricchita di due opere veramente fondamentali.

GIACOMO ALBANESE

N. E. NÖRLUND: *Leçons sur les séries d'interpolation.* Pag. VII-233. (Collezione BOREL). Paris, Gauthier-Villars (1926).

L'illustre prof. NÖRLUND dell'Università di Copenaghen, al quale dobbiamo il recente libro *Differenzen rechnung*, ha voluto, nella collezione BOREL, pubblicare un notevole libro sulle serie d'interpolazione, cioè sulle serie classiche di GAUSS, NEWTON, BESSEL, STIRLING. In esso vengono esposti i problemi, tutti del più alto interesse, ad esse legati, della teoria dell'approssimazione numerica e della teoria delle funzioni.

L'A. espone i molteplici risultati, di cui non pochi a Lui si debbono, con profondità e chiarezza veramente meravigliose, e si può affermare senza tema alcuna che questo libro sarà fondamentale per le ricerche future sul Calcolo delle differenze.

Nel primo Capitolo pone le definizioni fondamentali del Calcolo delle differenze, indi tratta della formula di NEWTON e LAGRANGE per la rappresentazione di una funzione mediante un polinomio di grado n. Dà poi diverse forme del resto della serie di NEWTON, e quindi considera la rappresentazione delle funzioni interpolari mediante integrali definiti, risultati che in gran parte si debbono a PEANO, la relazione che intercede tra questa formula di NEWTON e quella di LAGRANGE ed infine dà un primo accenno delle serie di GAUSS, STIRLING e BESSEL, che mostra legate tutte strettamente fra loro.

Nel secondo Capitolo studia profondamente la serie di STIRLING, tratta delle condizioni necessarie perchè una funzione intera sia sviluppabile in serie di STIRLING e dà la teoria delle funzioni sviluppabili in serie di STIRLING, richiamando così i risultati di WHITTAKER, OGURA, PÒLYA, CARLSON, VALIRON, SZEGÖ, ecc.; chiude il capitolo facendo vedere che, fra tutte le funzioni che prendono valori dati nei punti $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ la serie di STIRLING rappresenta quella a crescenza minima.

Il Capitolo terzo è tra i più belli del libro, perchè espone con singolare perizia le proprietà dell'ordine di una funzione analitica in un punto o su un arco del cerchio di convergenza; non è possibile richiamare qui tutti i risultati che esso contiene; diciamo solo che a prescindere da quelli fondamentali di HADAMARD, l'A. richiama quelli di APPELL, PRINGSHEIM, BOREL, FABRY, HARDY, LITTLEWOOD, ecc. Le proprietà dell'ordine di una funzione analitica permettono di vedere per altra via i risultati già esposti e sono fondamentali per la trattazione della serie di NEWTON.

Nel Capitolo quarto mostra che alla serie di interpolazione di STIRLING appartiene un integrale del tipo di quello introdotto da

LAPLACE nel Calcolo delle probabilità, e se ne serve per chiarirne le varie proprietà; tratta così della trasformazione di EULERO e di un'altra simile della serie di STIRLING, delle diverse rappresentazioni mediante l'integrale di LAPLACE di questa serie, e dà degli esempi: la serie di BESSEL e la serie ipergeometrica come serie di STIRLING e come mezzo per studiare il comportamento asintotico della serie stessa.

Il Capitolo quinto riguarda la serie d'interpolazione di NEWTON. La serie di STIRLING ha delle applicazioni più limitate di quella di NEWTON: lo studio di quest'ultima serie ha fatto perciò l'oggetto di un gran numero di lavori, sopra tutto di PINCHERLE, BENDIXON, LANDAU, CARLSON, PÒLYA e SZEGÖ, ecc. LANDAU ha mostrato l'analogia tra questa serie, quella di DIRICHLET e quella di facoltà.

L'A. tratta ampiamente dell'ascissa di convergenza assoluta ed uniforme, degli sviluppi dello zero in serie di questa forma, dovuti a FROBENIUS, BENDIXSON, PINCHERLE, delle trasformazioni lineari di questa serie, della sviluppabilità delle funzioni in serie di NEWTON, dell'integrale di LAPLACE e delle sue relazioni colla serie in discorso, dell'importanza dell'ordine di una funzione analitica per la sviluppabilità in serie di NEWTON, e della relazione dell'ordine con l'ascissa di convergenza.

Il Capitolo sesto riguarda le serie di facoltà che presentano non poche analogie con quelle di NEWTON, pur staccandosi nettamente da queste per altre proprietà, come ad esempio l'unicità degli sviluppi in serie di questa forma; espone la relazione tra queste serie e l'integrale di LAPLACE accennando agli studi di PINCHERLE il quale aveva dato su queste serie molteplici risultati, tratta del loro campo di convergenza, del prolungamento analitico e delle operazioni fondamentali dell'analisi applicate a queste serie, moltiplicazione, differenziazione, integrazione, differenza e somma.

Da questa rapida scorsa alle diverse parti del libro, si vede quanto esso debba riuscire proficuo per le ricerche ulteriori sull'argomento, e per il perfezionamento del calcolo delle differenze.

R. Università di Cagliari, aprile 1927.

GIUSEPPE BELARDINELLI

A. V. VASILJEF: *Numero intero* (Zeloe Cisto) - Saggio storico con 24 ritratti e disegni intercalati nel testo e una tavola separata. Biblioteca Matematica. Pietrogrado, 1892.

È un volumetto, che traduce però un ampio quadro di nozioni e di accenni suggestivi sulle relazioni della teoria dei numeri cogli altri rami della Matematica e la Fisica. Il testo è diviso in quindici capitoli di cui sono i seguenti i titoli e i brevi sommarî dello stesso Autore, che li accompagnano, valevoli a fornire un saggio del contenuto.

I. *Da uno e due all' infinito.* Genesi del concetto di numero intero positivo. Il numero presso gli indiani. Il psammite di Archimede. - II. *Mistica numerica.* La matematica presso gli egiziani e in Babilonia. La scuola di Pitagora. Platone. I neoplatonici. Sopravvivenza della mistica numerica nella cultura contemporanea. - III. *Principio della scienza dei numeri.* Scuola di Platone. Aristotele. Epoca alessandrina. Gli elementi di Euclide. Archimede e Apollonio di Perga. L' « Isagogo » di Nicomaco Gerasceno. Teone di Smirne. - IV. *Diofanto.* L' aritmetica di Diofanto. - V. *Gli indiani* - VI. *Da Diofanto a Fermat.* Gli arabi. Epoca del Rinascimento. Leonardo Fibonacci e Giordano Nemorario. Sviluppo dell' aritmetica pratica. Sviluppo dell' algebra e della teoria delle equazioni. Generalizzazione del concetto di numero. Vieta e Bachet de Meziriac. - VII. *Fermat e Euler.* Principali teoremi di Fermat. Leibniz. Analisi dei lavori di Fermat. *A*1) Lavori connessi coi lavori di Fermat. *A*2) Lavori connessi coi lavori di Diofanto. *B*) Nuovi metodi e nuovi problemi dati da Euler. VIII. *Lagrange e Legendre.* - IX. *Gauss.* Riassunto delle « Disquisitiones arithmeticae ». Rimanenti lavori di Gauss. - X. *Idee fondamentali della attuale aritmetica superiore.* § 1. Distribuzione dei numeri in classi secondo un modulo, e operazioni sulle classi. § 2. Particolari proprietà delle classi. Moduli a più termini. § 3. Distribuzione delle forme quadratiche binarie in classi e composizione delle classi. § 4. Le classi nella teoria delle irrazionalità quadratiche. § 5. Fondamenti della teoria delle funzioni intere a coefficienti interi. § 6. Più importanti concetti della attuale aritmetica superiore. - XI. *Teoria aritmetica dei numeri algebrici.* Ricerche di Kummer. Teorie di Dedekind e di Kronecker. - XII. *Geometria dei numeri.* § 1. Reticoli di punti. Reticoli nel piano e nello spazio e teoria delle forme binarie e ternarie. § 2. Geometria a più dimensioni. - XIII. *Teoria dei numeri e Analisi.* § 1. Invarianti delle classi. Teoremi di Kronecker. § 2. Teoria analitica dei numeri. § 3. Questioni aritmetiche e Analisi. - XIV. *Mysteria maxime recondita.* § 1. Problema dei numeri primi. § 2. Ultimo problema di Fermat. - XV. *Teoria dei numeri e indirizzo fisico.*

Con predominio della narrazione, nei primi nove capitoli, e dell' esposizione, nei due seguenti, l' autore accenna, nei rimanenti, a molteplici relazioni della Scienza dei numeri con altri rami della matematica e colla fisica, che vi conferiscono particolare interesse.

Senonchè egli stesso, in una breve dichiarazione, in fine al volume, prega di considerare l'ultima parte del libro piuttosto come un programma d'altro libro, che dovrà rappresentare pienamente lo sviluppo della teoria dei numeri dopo Gauss. Chiede venia al lettore per la ristrettezza dell'esposizione di cotesta parte, e per gli eventuali difetti di chiarezza che ne derivano, adducendo a giustificazione, da una parte, la condizione di spirito, ed anche il turbamento fisico, a cui non poteva sottrarsi un rappresentante della intellettualità russa nella primavera e nell'estate del 1919, quando fu scritto questo libro « (quantunque, per esser giusti, l'autore non sia stato obbligato a scaricare la legna e abbia anche ricevuto la razione dei fanciulli) », e, d'altra parte, la mancanza di carta e di editori.

Gian Antonio Maggi

J. L. Coolidge: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitrechnung.* Deutsche Ausgabe von F. M. Urban. Leipzig-Berlin, Teubner, 1927, IX+212 pag. in-8.

È un libro scritto, come sogliono scrivere gli anglo-sassoni, in tono più discorsivo che cattedratico, con abbondanti esempi sviluppati o proposti (questi ultimi sono oltre 40), e con frequenti richiami a questioni della vita pratica, colla quale la teoria delle probabilità ha il più stretto contatto.

L'Autore, che considera questa teoria come una disciplina sperimentale, dopo un esame critico delle varie definizioni che sono state date della probabilità, stabilisce (Cap. 1) come un postulato empirico che, se un fatto, il quale può aver luogo in due modi diversi, si ripete un numero indefinitamente crescente di volte in circostanze invariate, il rapporto del numero dei casi in cui esso si verifica in uno dei due modi al numero totale delle prove tende ad un limite, e a questo limite dà il nome di *probabilità*. Egli non si nasconde le obiezioni a cui può dar luogo questa definizione, e la completa con altri postulati empirici. Fissato questo punto fondamentale, l'autore passa (Cap. 2) a sviluppare gli elementi del Calcolo delle probabilità, i teoremi sulla probabilità totale e sulla probabilità composta, il concetto di speranza matematica e le sue applicazioni. Il teorema di Bernoulli forma l'oggetto del Cap. 3; esso viene dimostrato prima elementarmente, poi per mezzo della formula di Stirling; con questo teorema si connette lo studio del noto integrale di Laplace, e il capitolo termina con un interessante paragrafo sui giuochi d'azzardo. Segue (Cap. 4) la teoria dei valori medi e della dispersione, da cui si deduce il teorema di CEBICEFF e la legge dei grandi numeri di POISSON.

Passando (Cap. 5) alle probabilità geometriche, l'autore mette in chiaro come i risultati che si ottengono in questo campo variino in generale a seconda della scelta delle variabili indipendenti; discute il paradosso di BERTRAND e il problema dell'ago, e sviluppa una serie d'esempi tolti dalla nota opera di CZUBER.

Viene ora (Cap. 6) alla questione della probabilità delle cause. *Causa* di un avvenimento B è un avvenimento A che lo precede; la probabilità che B abbia per causa A è il limite a cui tende il rapporto dei numeri dei casi in cui A è stato seguito da B al numero totale dei casi in cui A ha avuto luogo. In base a questa definizione, si dimostra facilmente il teorema di BAYES, che viene esteso al caso di probabilità continue, ed applicato a svariati esempi. Col Cap. 7 si entra nella teoria degli errori d'osservazione. Anche qui, fatta la distinzione tra errori costanti ed errori casuali, si stabiliscono vari postulati, che permettono di dimostrare il principio della media aritmetica e la legge esponenziale degli errori; segue un riassunto delle discussioni che hanno avuto luogo sulle osservazioni dubbiose, e sul diritto che ha o non ha l'osservatore di escluderle dai sui calcoli. La legge esponenziale viene estesa (Cap. 8) alle osservazioni dipendenti da più variabili; il caso di due variabili conduce allo studio della ellisse degli errori (di cui si fa l'applicazione ai colpi dalla famosa BERTHA su Parigi) e del coefficiente e rapporto di correlazione. Il Cap. 9 è dedicato al metodo dei minimi quadrati ed alla rappresentazione dei fenomeni mediante curve empiriche; è interessante il confronto tra lo sviluppo di una funzione in serie di potenze e quello in serie trigonometrica. I due ultimi capitoli trattano di due applicazioni molto disparate del Calcolo delle probabilità: la teoria cinetica dei gas, e la scienza delle assicurazioni. Nel Cap. 10, stabiliti i caratteri generali dei gas perfetti, l'autore mostra come si possa rappresentare lo stato di un insieme di n molecole gasose mediante un punto di uno spazio a $6n$ dimensioni, che si riduce ad uno a $3n$ dimensioni quando debbano studiarsi proprietà dei gas dipendenti soltanto dalla velocità delle molecole, ed utilizza tale rappresentazione per dimostrare la legge di MAXWELL, di cui riferisce anche la dimostrazione originale, rilevandone però le imperfezioni; tratta poi della distribuzione delle molecole gasose, specialmente nel caso in cui il loro diametro sia trascurabile. Infine nel Cap. 11, dopo alcuni cenni sulle tavole di sopravvivenza e nelle formole relative, l'autore ricava le formole fondamentali relative ai vari tipi di assicurazioni sulla vita ed alle rendite vitalizie. Il volume si chiude con due tabelle, di cui una dà i logaritmi decimali di e^n e di e^{-n}, e l'altra i valori dell'integrale $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^n e^{-x^2}\,dx$ per i valori di x, di millesimo in millesimo, da 0 a 3.

G. VIVANTI

M. LECAT: *Coup d'œil sur la théorie des déterminants supérieurs dans son état actuel.* Préface de M. A. BUHL. Bruxelles, Lamertin, 1927, VIII+97+99 pag. in-8°.

MAURICE LECAT, che da anni dedica gran parte della sua attività scientifica allo studio dei determinanti a più dimensioni, e che sta preparando un esteso trattato su questo argomento, fa precedere alla sua grande opera una specie di riassunto o di introduzione della medesima. Nel volume che abbiamo sott'occhio, egli non solo presenta un quadro completo dello stato attuale della teoria, ma richiama l'attenzione su molti punti che attendono ancora il loro sviluppo; sicchè un giovane matematico, che non si lasciasse scoraggiare dalle prime difficoltà, potrebbe attingere da questo libro nuovi ed interessanti soggetti di ricerca.

Entrare in particolari sul contenuto dell'opera vorrebbe dire anzitutto spiegare un numero non piccolo di termini tecnici e di simboli speciali, ciò che non sarebbe nè utile nè piacevole per chi legge. Ci basti aver segnalato ai nostri matematici un'opera che, non uscendo da una delle grandi case editrici, potrebbe forse passare inosservata, e che merita invece di essere largamente conosciuta.

G. VIVANTI

G. CASSINIS: *Calcoli numerici, grafici e meccanici.* Pisa, Tipografia editrice Mariotti, fasc. I, pag. VIII+280.

L'A. raccoglie in questo libro il corso di lezioni che svolge per gli allievi ingegneri nella Università di Pisa, ma l'interesse del volume non è soltanto didattico poichè, a quanto mi consta, è questa la prima opera completa sull'argomento che si pubblichi in Italia. Il primo fascicolo, testè uscito, è diviso in otto capitoli; gli altri sei, a completamento dell'opera, saranno stampati al più presto; ma già dalla lettura di questa prima parte risulta tutto l'interesse del lavoro.

Il primo Capitolo del libro tratta delle approssimazioni numeriche; è l'argomento fondamentale che l'A. svolge in modo molto chiaro e preciso determinando sia un limite superiore per l'errore del risultato noti che siano gli errori dei dati, sia l'errore ammissibile nei dati quando si voglia, per il risultato, un certo grado di approssimazione. Il Capitolo secondo tratta delle operazioni aritmetiche e dei problemi ad esse connessi (tavole numeriche, passaggio da un sistema di misura ad un altro, calcolo logaritmico); il terzo delle macchine inventate per eseguirle (dei bastoni di Nepero alle moderne); il quarto dei metodi di calcolo grafico ideati allo stesso scopo, con riguardo anche alla Nomografia. Tanto il calcolo grafico che la Nomografia sono esposti dall'A. secondo lo schema classico; esposizioni di tipo più moderno sono ricordate nella bibliografia.

Dopo un Capitolo [5°] sulla interpolazione ed uno [6°] sulle serie, l'A. studia le equazioni algebriche e trascendenti [Cap. 7°], e l'integrazione e derivazione approssimata [8°]. Qui l'A., oltre alle formule e agli apparecchi meccanici, sviluppa la trattazione grafica; ed è indubbio che i metodi grafici dimostrano qui la loro massima utilità, ma essi tornano opportuni in molte altre questioni; l'A. si limita di proposito alla esposizione della sola parte fondamentale di questi perchè ritiene che la preferenza data dagli ingegneri ai metodi grafici rappresenti *un vero feticismo*. Forse, in qualche caso, l'A. ha ragione, ma ai molti vantaggi di semplicità, rapidità e evidenza che hanno spesso i metodi grafici occorre aggiungere anche la loro utilità didattica; quale altro metodo può rendere così presto famigliari all'allievo i concetti di unità, di scala, di dimensione e gli analoghi che tanto servono nella redazione di un progetto?

Col Capitolo ottavo ha termine questo fascicolo; per dare un'idea più precisa del volume aggiungeremo che ogni capitolo è corredato opportunamente da esercizî e da note bibliografiche e ricorderemo i titoli dei capitoli di prossima pubblicazione:

9) Le principali funzioni trascendenti (funzioni iperboliche, funzione gamma, integrale di GAUSS, funzioni sferiche, cilindriche ed ellittiche, integralogaritmo, integrali di FRESNEL).

10) Integrazione approssimata delle equazioni differenziali.

11) Elementi di Calcolo Vettoriale.

12) Elementi di Calcolo delle probabilità.

13) Metodo dei minimi quadrati.

14) Rappresentazione empirica dei risultati sperimentali.

Auguriamo che l'opera sia presto completata con la stampa di questo secondo fascicolo, il cui interesse risulta già indubbio da questo semplice schema.

GIULIO SUPINO