
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMI

Sunti di lavori italiani

* Lavori di: G. Torelli, M. Piazzolla-Beloch

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 6 (1927), n.4, p. 191–197.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_4_191_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_4_191_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_4_191_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

SUNTI DI LAVORI ITALIANI

G. TORELLI: *Sulla integrazione di un'equazione di Riccati*. Rendiconto della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli. (Adunanze del 5 febbraio, 2 aprile, 7 maggio 1927)

1. Questa nota contiene uno studio di tutti gli eventi, che possono presentarsi nella integrazione della equazione lineare di 2° ordine

$$(1) \quad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(x^{2\lambda} + \lambda b x^\lambda + \frac{1}{4}(l^2 - 1) \right) y$$

(dove la variabile x è supposta reale e maggiore di 0, e le costanti b, l, λ sono numeri reali e $\lambda > 0$) e quindi dell'equazione di RICCATI

$$x^2 \frac{du}{dx} + x^2 u^2 = x^{2\lambda} + \lambda b x^\lambda + \frac{1}{4}(l^2 - 1)$$

legata alla prima dalla relazione $u = \frac{d \log y}{dx}$.

Casi particolari di queste equazioni figurano in classiche ricerche di Meccanica, e di Fisica matematica, e inoltre sono stati studiati fra gli altri da LIOUVILLE, MALMSTEN, BRIOSCHI, GENOCCHI, SIACCI. Il Prof. E. PASCAL considerò proprio le equazioni scritte più sopra; ma egli, come i suoi predecessori, ebbe in mira specialmente la questione della integrabilità sotto forma finita.

Nella nota qui riassunta una rappresentazione geometrica mette in rilievo la genesi della distinzione necessaria fra i vari casi, ed il conseguente cambiamento di forma della soluzione, che in ognuno viene determinata.

2. Si premette la esposizione di alcune proprietà degli integrali definiti

$$\Phi_1(x, n, \nu) = \int_0^1 e^{at t^\nu} (1-t)^\nu dt, \quad \Phi_2(x, n, \nu) = \int_{-\infty}^0 e^{at t^\nu} (1-t)^\nu dt.$$

per la cui convergenza occorrono e bastano le condizioni $n-1 \geq j$, $v-1 \geq 0$.

Essi verificano le seguenti relazioni ricorrenti:

$$(n+1)\Phi(x, v) + (x-n-v-2)\Phi(x, v+1) - \Phi(x, v+2) =$$

$$(v-1)\Phi(x, v) - (x-n+v+2)\Phi(x, n, v+1) + \alpha\Phi(x, n, v+2) = 0.$$

Da queste si ricavano le altre due

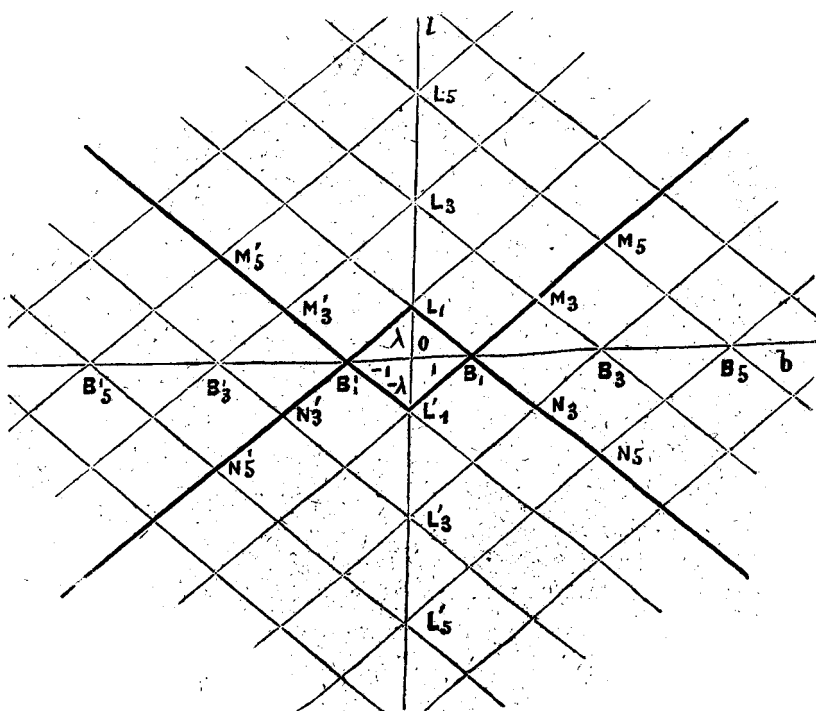
$$(n-1)(n+2)\dots(n+r)\Phi(x, n) = D_r\Phi(x, n+r, v) +$$

$$+ \alpha D_{r-1}\Phi(x, n+r+1, v)$$

$$(v+1)(v+2)\dots(v+r)\Phi(x, n) = \Delta_r\Phi(x, n, v+r) -$$

$$- \alpha \Delta_{r-1}\Phi(x, n, v+r+1),$$

dove r è un intero positivo e D_r , Δ_r sono polinomi in x di grado r , i coefficienti dei quali sono funzioni di n e v .



Siano ora scelti in un piano due assi ortogonali, e sientino quello delle ascisse i valori del parametro b , e su quello delle ordinate i valori di l . Si segnino sull'asse delle b i punti $B_1, B_3, B_5, \dots$ di ascisse $1, 3, 5, \dots$, e i punti $B'_1, B'_3, B'_5, \dots$ di ascisse $-1, -3, -5, \dots$; sull'asse delle l i punti $L_1, L_3, L_5, \dots$ di ordinate $\lambda, 3\lambda, 5\lambda, \dots$ e i punti $L'_1, L'_3, L'_5, \dots$ di ordinate $-\lambda, -3\lambda, -5\lambda, \dots$. Si tirino le rette indefinite $B_1L_1, B_3L_3, B_5L_5, \dots, B'_1L'_1, B'_3L'_3, B'_5L'_5, \dots$; e l'altro sistema di parallele $B'_1L_1, B'_3L_3, B'_5L_5, \dots, B_1L'_1, B_3L'_3, B_5L'_5, \dots$.

Questo reticolato scompartisce il piano in parallelogrammi, che convenientemente associati formano quattro regioni angolari cioè $I \equiv M'_5L'_1M_5$, $II \equiv N'_5L_1N_5$ (le quali hanno in comune il parallelogrammo $B'_1L'_1B_1L_1$), $III \equiv M'_5B'_1N'_5$, $IV \equiv M_5B_1N_5$.

4. Dopo ciò si stabilisce che:

I.) Se i parametri b, l sono l'ascissa e l'ordinata di un punto interno alla regione $M'_5L'_1M_5$ l'integrale generale della (1) è

$e^{-\frac{x^\lambda}{\lambda}} x^{\frac{1+l}{2}} (C_1\Phi_1(x, n, v) + C_2\Phi_2(x, n, v))$, dove è

$$(2) \quad \alpha = \frac{2x^\lambda}{\lambda}, \quad n = \frac{(b-1)\lambda + l}{2\lambda}, \quad v = \frac{-(b+1)\lambda + l}{2\lambda}.$$

II.) Se (b, l) è interno alla seconda regione $N'_5L_1N_5$, l'integrale generale della (1) è $e^{-\frac{x^\lambda}{\lambda}} x^{\frac{1-l}{2}} (C_1\Phi_1(x, n, v) + C_2\Phi_2(x, n, v))$, dove

$$(3) \quad \alpha = \frac{2x^\lambda}{\lambda}, \quad n = \frac{(b-1)\lambda - l}{2\lambda}, \quad v = \frac{-(b+1)\lambda - l}{2\lambda}.$$

III.) Se (b, l) si trova nell'interno o sui lati dell'angolo $M'_5B'_1N'_5$, l'integrale generale della (1) può essere espresso da

$$e^{-\frac{x^\lambda}{\lambda}} x^{\frac{1+l}{2}} \{ C_1[D_1\Phi_1(x, n+r, v) + \alpha D_{-1}\Phi_1(x, n+r+1, v)] + \\ + C_2[D_1\Phi_2(x, n+r, v) + \alpha D_{-1}\Phi_2(x, n+r+1, v)] \},$$

dove x, n, v hanno i valori (2) e l'intero r è scelto tale che sia $n+r+1 > 0$. Oppure lo stesso integrale può essere espresso da

$$e^{-\frac{x^\lambda}{\lambda}} x^{\frac{1-l}{2}} \{ C_1[\Delta_1\Phi_1(x, n, v+r) - \alpha \Delta_{-1}\Phi_1(x, n, v+r+1)] + \\ + C_2[\Delta_1\Phi_2(x, n, v+r) - \alpha \Delta_{-1}\Phi_2(x, n, v+r+1)] \},$$

dove α, n, ν hanno i valori (3), e l'intero r è scelto tale che sia $\nu + r + 1 > 0$.

IV.) Se infine (b, l) si trova nell'interno o sui lati dell'angolo $M_5 B_1 N_5$, l'integrale generale della (1) può essere espresso da

$$e^{-\frac{x^\lambda}{\lambda}} x^{\frac{1+l}{2}} \{ C_1 [\Delta_1 \Phi_1(\alpha, n, \nu + r) - \alpha \Delta_{r-1} \Phi_1(\alpha, n, \nu + r + 1)] + \\ + C_2 [\Delta_2 \Phi_2(\alpha, n, \nu + r) - \alpha \Delta_{r-1} \Phi_2(\alpha, n, \nu + r + 1)] \},$$

dove α, n, ν hanno i valori (2), e l'intero r è scelto tale che sia $\nu + r + 1 > 0$. Oppure lo stesso integrale può essere espresso da

$$e^{-\frac{x^\lambda}{\lambda}} x^{\frac{1-l}{2}} \{ C_1 [D_1 \Phi_1(\alpha, n + r, \nu) + \alpha D_{r-1} \Phi_1(\alpha, n + r + 1, \nu)] + \\ + C_2 [D_2 \Phi_2(\alpha, n + r, \nu) + \alpha D_{r-1} \Phi_2(\alpha, n + r + 1, \nu)] \},$$

dove α, n, ν hanno i valori (3), e l'intero r è scelto tale che sia $n + r + 1 > 0$.

In ambedue le ipotesi III e IV, l'integrale generale è una combinazione lineare di integrali di due equazioni differenziali del solito tipo corrispondenti a punti (b, l) compresi nelle regioni I e II.

5. Le rette BL , che formano il reticolato poc'anzi costruito godono della notevole proprietà enunciata nel teorema:

Condizione necessaria e sufficiente acciocchè l'integrale generale dell'equazione

$$(1) \quad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(x^{2\lambda} + \lambda b x^\lambda + \frac{1}{4} (l^2 - 1) \right) y,$$

o della corrispondente equazione di RICCATI, sia esprimibile mediante un numero limitato di segni algebrici, di trascendenti elementari, e di *segni d'integrazione indefinita rispetto alla variabile x* , è che il punto (b, l) appartenga ad una qualsiasi delle rette BL del reticolato poc'anzi costruito.

6. La seguente proposizione palesa poi una proprietà dei vertici dei parallelogrammi del reticolato:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè l'integrale generale dell'equazione

$$(1) \quad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(x^{2\lambda} + \lambda b x^\lambda + \frac{1}{4} (l^2 - 1) \right) y,$$

o della corrispondente equazione di RICCATI, sia composto di un numero limitato di segni algebrici, o contenenti al più trascendenti elementari (o, come suol dirsi, abbia forma finita) è che il punto (b, l) sia vertice di uno qualsiasi dei parallelogrammi del reticolato, vale a dire che i parametri b, l siano forniti dal sistema $b = s - t, l = (s + t + 1)\lambda$, dove s e t sono interi positivi, nulli, o negativi.

Per $b = 0$ questo teorema si riduce a quello di LIOUVILLE sull'equazione di RICCATI.

La condizione espressa da tale sistema *ma con s e t non negativi* era stata riconosciuta sufficiente da SIACCI in un caso particolare, e da PASCAL nel caso generale, ma non poteva essere dimostrata necessaria, perchè non comprendeva tutti i possibili casi di integrazione in termini finiti.

7. Quando si verifica la integrabilità per quadrature o in termini finiti si può presentare l'integrale generale sotto tale forma da porre in evidenza queste proprietà. Basta farlo quando (b, l) giace in una delle prime due regioni, gli altri casi potendo ridursi a questi. Supposto dunque che (b, l) appartenga ad una delle rette $B'_{2t+1}I'_{2t+1}, B'_{2t+1}I_{2t+1}$, le cui equazioni sono $b\lambda \mp l = (2t + 1)\lambda$ dove è $t \geq 0$, posto

$$R_1 = 1 + \sum_{i=1}^t \binom{t}{i} \frac{\alpha^i}{(b + 2t)(b + 2t - 1) \dots (b + 2t - i + 1)},$$

$$y_1 = e^{-\frac{x^\lambda}{\lambda} x^{\frac{\pm l + 1}{2}}} R_1.$$

L'integrale generale della (1) è $Ay_1 + By_1 \int \frac{dx}{y_1^2}$.

Se invece (b, l) appartiene ad una delle rette $B_{2s+1}I'_{2s+1}, B_{2s+1}I_{2s+1}$, le cui equazioni sono $b\lambda \mp l = (2s + 1)\lambda$ dove è $s \geq 0$, posto

$$R_2 = 1 + \sum_{i=1}^s \binom{s}{i} \frac{\alpha^i}{(b - 2s)(b - 2s + 1) \dots (b - 2s + i - 1)},$$

$$y_2 = e^{-\frac{x^\lambda}{\lambda} x^{\frac{\pm l + 1}{2}}} (e^\alpha R_2).$$

L'integrale generale della (1) è $Ay_2 + By_2 \int \frac{dx}{y_2^2}$.

Infine se (b, l) è il vertice $(B'_{2l+1}I_{2l+1}, B_{2s+1}I_{2s+1})$ oppure $(B'_{2l+1}I'_{2l+1}, B_{2s+1}I'_{2s+1})$ l'integrale generale ha la forma finita

$$e^{-\frac{x^\lambda}{\lambda} x^{\pm l+1}} (AR_1 + Be^{\alpha} R_2).$$

8. La nota si chiude coll'osservazione che il reticolato fornisce una rappresentazione geometrica delle probabilità dei tre eventi, che può presentare l'integrazione dell'equazione (1), o della corrispondente equazione di RICCATI, in cui siano assegnati a caso i parametri b, l , cioè che l'integrale generale sia esprimibile sotto forma finita, o che lo sia includendovi inoltre un numero limitato di quadrature rispetto alla variabile x , o che lo sia mediante il necessario intervento di integrali definiti, o di altro mezzo equivalente.

M. PIAZZOLLA-BELOCH: *Intorno alla iperellitticità di certe superficie del 4° ordine con 15 punti doppi* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. T. L (1926)).

L'A. dimostra il teorema: *Ogni superficie algebrica del 4° ordine con 15 punti doppi (conici), la quale possessa una curva razionale d'ordine $4r$ (r intero ≥ 1), non passante per i punti doppi, è iperellittica.*

Dalla dimostrazione data dall'A. segue ancora che *ogni superficie d'ordine $8r^2 + 4$ dello spazio a $4r^2 + 3$ dimensioni, a sezioni iperpiane di genere $4r^2 + 3$, dotata di 16 punti doppi, è iperellittica.*

— — *Intorno alla iperellitticità di certe superficie del 4° ordine con 14 punti doppi.* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, T. L (1926)).

L'A. dimostra il teorema: *Ogni superficie algebrica del 4° ordine con 14 punti doppi (conici), la quale possessa due curve razionali di ordini $2k_1$ e $2k_2$ rispettivamente (k_1 e k_2 interi ≥ 1 , contemporaneamente pari oppure dispari) non passanti per i punti doppi, è iperellittica.*

Dalla dimostrazione data dall'A. segue ancora che: *Ogni superficie d'ordine $2k_1^2 + 2k_2^2 + 4 = 48$ dello spazio a $k_1^2 + k_2^2 + 3 = 25 + 1$ dimensioni, a sezioni iperpiane di genere $25 + 1$, dotata di 16 punti doppi, è iperellittica.*

M. PIAZZOLLA-BELOCH: *Intorno alla iperellitticità di certe superficie del 4° ordine con 13 punti doppi.* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, T. LI (1927)).

Dopo aver determinato le curve dei primi ordini situate sui diversi tipi di superficie iperellittiche del 4° ordine con 13 punti doppi, l'A. dimostra viceversa che *ogni superficie algebrica del 4° ordine con 13 punti doppi (conici), la quale possieda tre curve razionali, di ordini $2k_1, 2k_2, 2k_3$ rispettivamente (k_1, k_2, k_3 essendo numeri interi ≥ 1 , tutti e tre pari, o uno pari e due dispari) non passanti per i punti doppi, è iperellittica.*

Dalla dimostrazione data dall'A. segue ancora che *ogni superficie d'ordine $2k_1^2 + 2k_2^2 + 2k_3^2 + 4 = 45$ dello spazio a $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + 3 = 25 + 1$ dimensioni, a sezioni iperpiane di genere $2\delta + 1$, dotata di 16 punti doppi, è iperellittica.*
