Bollettino Unione Matematica Italiana

N. Agronomof

Sur quelques formules concernant la formule $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (n-k)^k = n!$

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (1927), n.4, p. 187–190.
Unione Matematica Italiana
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_4_187_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1927.

Sur quelques formules concernant la formule $\sum \binom{n}{k}(n-k)^n = n!$ (« Boll. U. M. I. », 1927. p. 34)

par N. AGRONOMOF (a Vladivostok).

1. Soient

(1) $$\alpha_1 \quad \alpha_2 \dots \alpha_n$$

n nombres arbitrairement choisis.

Désignons par

(2) $$\rho_1^p \quad \rho_2^p \dots \rho_n^p$$

les sommes des puissances successives des sommes 1 à 1. 2 à 2.... n à n des nombres (1), c'est à dire

(3) $$\begin{cases} \rho_1^p = \alpha_1^p + \alpha_2^p + \dots + \alpha_p^n \\ \rho_2^p = (\alpha_1 + \alpha_2)^p + (\alpha_1 + \alpha_3)^p + \dots + (\alpha_{n-1} + \alpha_n)^p \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \rho_n^p = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)^p. \end{cases}$$

Cela posé, nous avons les formules suivantes

$$(4)\qquad \begin{cases} \rho_n^p - \rho_{n-1}^p + \rho_{n-2}^p + \dots + (-1)^{n-1}\rho_1^p = 0 & p < n \\ \rho_n^n - \rho_{n-1}^n + \rho_{n-2}^n + \dots + (-1)^{n-1}\rho_1^n = n!\, \alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_n . \end{cases}$$

Pour établir ces formules, nous considérons la fonction

$$(5)\qquad f_p(\alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_n) = \rho_n^p - \rho_{n-1}^p + \rho_{n-2}^p + \dots + (-1)^{n-1}\rho_1^p .$$

Il est facile de voir que

$$(6)\qquad \begin{cases} f_p(0\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3 \dots \alpha_n) = 0 \\ f_p(\alpha_1\ \ 0\ \ \alpha_3 \dots \alpha_n) = 0 \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ f_p(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \dots 0) \ = 0. \end{cases}$$

Par suite

$$(7)\qquad f_p(\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_n) = k\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_n$$

k étant un nombre fixe.

Mais

$$(8)\qquad \frac{\partial^n f_p}{\partial\alpha_1\, \partial\alpha_2 \dots \partial\alpha_n} = 0, \qquad \frac{\partial k\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_n}{\partial\alpha_1\, \partial\alpha_2 \dots \partial\alpha_n} = k \qquad p < n$$

$$(8')\qquad \frac{\partial^n f_n}{\partial\alpha_1\, \partial\alpha_2 \dots \partial\alpha_n} = n! \quad \frac{\partial k\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_n}{\partial\alpha_1\, \partial\alpha_2 \dots \partial\alpha_n} = k$$

et par conséquent

$$(9)\qquad f_p(\alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_n) = 0, \quad f_n(\alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_n) = 0. \qquad p < n$$

2. En posant dans (4)

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots \alpha_n = a$$

on trouve

$$(10)\qquad \begin{cases} n^p - \binom{n}{1}(n-1)^p + \binom{n}{2}(n-2)^p \dots = 0 & p < n \\ n^n - \binom{n}{1}(n-1)^n + \binom{n}{2}(n-2)^n \dots = n! \end{cases}$$

(voir « Boll. U. M. I. », 1927, p. 34).

3. Soient

$$(11)\qquad \begin{cases} \alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_n \\ \beta_1\ \beta_2 \dots \beta_n \end{cases}$$

deux séries des nombres arbitraires.

Désignons par

$$\Sigma_0^p,\quad \Sigma_1^p,\quad \Sigma_2^p,\ldots$$

les sommes suivantes

$$(12)\quad \begin{cases} \Sigma_0^p = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)^p \\ \Sigma_1^p = (\beta_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)^p + (\alpha_1 + \beta_2 + \ldots + \alpha_n)^p + \ldots + \\ \qquad + (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \beta_n)^p \\ \Sigma_2^p = (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \alpha_n)^p + (\beta_1 + \alpha_2 + \beta_3 + \ldots + \alpha_n)^p + \ldots + \\ \qquad + (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \beta_{n-1} + \beta_n)^p \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Sigma_n^p = (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n)^p. \end{cases}$$

En raisonnant comme au 1°. nous avons la formule

$$(13)\quad \Sigma_0^p - \Sigma_1^p - \Sigma_2^p + \ldots + (-1)^n \Sigma_n^p = 0. \qquad p < n$$

Si l'on pose

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = a$$
$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = b$$

on trouve

$$(14)\quad (na)^p - \binom{n}{1}(\overline{n-1}a + b)^p + \binom{n}{2}(\overline{n-2}a + 2b) - \\ - \binom{n}{3}(\overline{n-3}a + 3b) + \ldots = 0.$$

4. Soient encore

$$(15)\quad \begin{cases} \alpha_1 = k_1 a_1 + k_2 b_1 + \ldots + k_m m_1 \\ \alpha_2 = k_1 a_2 + k_2 b_2 + \ldots + k_m m_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n = k_1 a_n + k_2 b_n + \ldots + k_m m_n \end{cases}$$

Les formules (4) donnent l'identité suivante

$$(16)\quad \begin{cases} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^{t_1} (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^{t_2} \ldots (m_1 + m_2 + \ldots + m_n)^{t_m} - \\ - \Sigma(a_{k_1} + a_{k_2} + \ldots + a_{k_{n-1}})^{t_1} (b_{k_1} + b_{k_2} + \ldots + b_{k_{n-1}})^{t_2} \ldots \\ \qquad \ldots (m_{k_1} + m_{k_2} + \ldots + m_{k_{n-1}})^{t_m} + \\ + \Sigma(a_{k_1} + a_{k_2} + \ldots + a_{k_{n-2}})^{t_1} (b_{k_1} + b_{k_2} + \ldots + b_{k_{n-2}})^{t_2} \ldots \\ \qquad \ldots (m_{k_1} + m_{k_2} + \ldots + m_{k_{n-2}})^{t_m} - \\ - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ + (-1)^{n-1} \Sigma a_{k_1}^{t_1} b_{k_1}^{t_2} m_{k_1}^{t_m} = 0 \end{cases}$$

lorsqu'on y remplace k_1, k_2,... par tous les nombres entiers depuis 1 jusqu'à n, avec cette restriction que l'on ait toujours

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_m < n.$$

Par exemple :

$$(a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3) - (a_2 + a_3)(b_2 + b_3) - (a_3 + a_1)(b_3 + b_1) -$$
$$- (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(b_1 + b_2 + b_3 + b_4)(c_1 + c_2 + c_3 + c_4) -$$
$$- (a_2 + a_3 + a_4)(b_2 + b_3 + b_4)(c_2 + c_3 + c_4) -$$
$$- (a_1 + a_3 + a_4)(b_1 + b_3 + b_4)(c_1 + c_3 + c_4) -$$
$$- (a_1 + a_2 + a_4)(b_1 + b_2 + b_4)(c_1 + c_2 + c_4) -$$
$$- (a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3)(c_1 + c_2 + c_3) + (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)(c_1 + c_2) +$$
$$+ (a_1 + a_3)(b_1 + b_3)(c_1 + c_3) + (a_1 + a_4)(b_1 + b_4)(c_1 + c_4) +$$
$$+ (a_2 + a_3)(b_2 + b_3)(c_2 + c_3) + (a_2 + a_4)(b_2 + b_4)(c_2 + c_4) +$$
$$+ (a_3 + a_4)(b_3 + b_4)(c_3 + c_4) - a_1 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_2 - a_3 b_3 c_3 - a_4 b_4 c_4 = 0.$$