BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

GIUSEPPE GHERARDELLI

Un tipo di corrispondenze simmetriche $(2, 2)$

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (1927), n.4, p. 184–187.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_4_184_0>

Un tipo di corrispondenze simmetriche (2,2).

Nota di GIUSEPPE GHERARDELLI (a Torino).

1. In una memoria inserita nei « Proceedings of the Irish Royal Academy » (1) EGAN studia con una certa ampiezza le curve sghembe del quinto ordine le cui tangenti sono contenute in un complesso lineare. Queste curve (necessariamente razionali), sono caratterizzate dal fatto di possedere quattro flessi ordinari, generalmente distinti. Su una di tali C^5 si consideri la corrispondenza S che associa come omologhi due punti allorchè l'uno sta nel piano osculatore relativo all'altro. La S è una (2,2) simmetrica, con i quattro punti uniti nei quattro flessi; ed essa individua projettivamente la C^5. Questa corrispondenza però, come EGAN stesso ha osservato, non è la più generale (2,2) simmetrica. Si presenta per-

(1) M. F. EGAN: *The linear complex and a certain class of twisted curves.* « Proc. Royal Irish Ac. » 29 (1911), p. 33, n. 18.

tanto la questione, posta ma non risoluta da EGAN, di riconoscere quando una data (2,2) simmetrica appartenga, nel senso ora detto, ad una C^5 di complesso lineare. Le semplici osservazioni che seguono possono servire allo scopo.

2. Mantenendo le notazioni precedenti, si noti che se P è un punto di C^5 e G_2 la coppia dei suoi corrispondenti in S, il gruppo $3P+G_2$ costituito dal punto P contato 3 volte e dalla coppia G_2, mentre P descrive la C^5, varia entro la serie lineare $g_5{}^3$ segata sulla curva dai piani dello spazio. Se dunque I è la corrispondenza identica, la corrispondenza $3I+S$ è di « rango » 3: cioè essa associa ai singoli punti di $C^5 \infty^1$ gruppi G_5 i quali appartengono ad una $g_5{}^3$ (¹). Viceversa se una (2,2) simmetrica S fra i punti di una retta è tale che la $3I+S$ sia di rango 3, la S stessa appartiene ad una C^5 di complesso lineare. In tal caso infatti i gruppi G_5 che la $3I+S$ associa ai singoli punti della retta appartengono ad una $g_5{}^3$; cosicchè, riferendo projettivamente i gruppi di questa $g_5{}^3$ ai piani dello spazio, si ottiene come trasformata della retta una C^5 sghemba razionale, sulla quale la corrispondenza S associa due punti allorchè l'uno di essi sta nel piano osculatore alla curva nell'altro: e poichè la S è simmetrica, la C^5 stessa appartiene ad un complesso lineare (²).

Precisiamo analiticamente la cosa.

3. Una (2,2) simmetrica è rappresentabile con un'equazione:

$$F(x;y)=0$$

dove F è una forma quadratica e simmetrica nelle due serie di variabili cogredienti x_1x_2, y_1y_2. Ponendo simbolicamente:

$$F(x;y)=a_x{}^2\alpha_y{}^2=a_y{}^2\alpha_x{}^2$$
$$f=F(x;x)=a_x{}^2\alpha_x{}^2$$

si ha per lo sviluppo di CLEBSCH-GORDAN:

$$F(x;y)=f_x{}^2f_y{}^2+\frac{1}{3}(a\alpha)^2(xy)^2$$

Se F è la più generale forma quadratica simmetrica, f è la più generale forma binaria del 4° ordine e $(a\alpha)^2$ una costante arbi-

(¹) C. SEGRE: *Un principio di riduzione nello studio delle corrispondenze algebriche*. Rend. R. Acc. Lincei $(28)_2$, (1919), p. 398, n. 5.

(² M. F. EGAN: Loco citato.

traria. Per tanto la più generale (2,2) simmetrica è rappresentabile con un'equazione del tipo:

$$F(x;y)=\lambda(xy)^2+f_x^2f_y^2 \tag{1}$$

dove λ è un parametro ed $f=a_0x_1^4+4a_1x_1^3x_2+\ldots$ è una forma binaria del 4° ordine, affatto qualunque.

Una (2,2) simmetrica possiede perciò tre invarianti indipendenti: i due varianti i e j della biquadratica f, l'annullarsi dei quali caratterizza la posizione equianarmonica o armonica dei quattro punti uniti della corrispondenza; e l'invariante lineare λ il cui annullarsi esprime che la (2,2) si riduce alla polarità del 2° ordine rispetto alla quaterna dei punti uniti.

La condizione affinchè la (2,2) rappresentata dalla (1) spetti ad una C^5 di complesso lineare si traduce in ciò che un certo invariante L della (2,2) deve annullarsi. La determinazione di L in funzione intera degli invarianti fondamentali i, j e λ si otterrà, per quanto sopra si è visto, esprimendo che la corrispondenza (5,5) rappresentata dall'equazione:

$$\Phi(x;y)=(xy)^3F(x;y)=\Sigma a_{ik}x_1^i x_2^{5-i}y_1^k y_2^{5-k}=0 \qquad (i,k=0,1,\ldots,5)$$

è di rango 3: cioè imponendo che il determinante Δ formato con le a_{ik} sia di caratteristica 4 e non minore ([1]). Ora si ha:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_4 & -2a_3 & -a_2-\lambda \\ 0 & 0 & 3a_4 & 4a_3 & 5\lambda-a_2 & -2a_1 \\ 0 & -3a_4 & 0 & 8a_2-10\lambda & 4a_1 & -a_0 \\ a_4 & -4a_3 & 10\lambda-8a_2 & 0 & 3a_0 & 0 \\ 2a_3 & a_2-5\lambda & -4a_1 & -3a_0 & 0 & 0 \\ a_2+\lambda & 2a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Si tratta di un determinante emisimmetrico del 6° ordine: se si annulla è di caratteristica 4; e non minore di 4, almeno se $F(x;y)$ non è identicamente nulla. D'altronde il determinante stesso è il quadrato di una funzione intera dei suoi elementi (PFAFFIANO) facilmente calcolabile con i noti procedimenti.

Si trova, a meno di un fattore numerico:

$$\Delta=(4j+7i\lambda-25\lambda^3)^2$$

([1]) C. SEGRE: Loco citato.

dove

$$i = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2; \quad j = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

Concludendo: affinchè la (2,2) rappresentata dalla (1) spetti ad una C^5 di complesso lineare è necessario e sufficiente che si abbia:

$$L = 4j + 7i\lambda - 25\lambda^3 = 0 \tag{2}$$

Per una (2,2) simmetrica del tipo considerato gli invarianti indipendenti si riducono pertanto a due soli: i e λ.

Se $\lambda = 0$, deve essere per la (2) anche $j = 0$. La (2,2) si riduce in tal caso alla polarità del 2° ordine rispetto ad una quaterna armonica. Se AB, CD sono le due coppie armoniche, la (2,2) stessa si spezza nelle 2 involuzioni aventi AB, CD come elementi doppi: mentre la quaterna degli elementi di diramazione si riduce manifestamente alla coppia armonica alla AB, CD contata due volte.

Questa particolare (2,2) spetta alle C^5 di complesso lineare con 4 flessi formanti gruppo armonico e una bitangente, diffusamente studiate da EGAN nel citato lavoro.

Torino, 29 aprile 1927.