BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

LETTER LABOCCETTA

Equazioni che rappresentano un intiero spazio, un semispazio od altri simili dominii

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (1927), n.4, p. 179–184.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_4_179_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1927.

Equazioni che rappresentano un intiero spazio, un semispazio od altri simili dominii.

Nota di LETTERIO LABOCCETTA (a Roma).

In una precedente nota [1], ho già mostrato come si possano costruire delle equazioni che rappresentano certi dominii, di uno spazio a due tre o più dimensioni, limitati da un contorno che sta tutto al finito, od anche i dominii ad essi complementari i quali si estendono dal detto contorno sino all'infinito.

Mi propongo ora di mostrare come, sempre servendosi soltanto di funzioni di variabili reali, si possano rappresentare mediante equazioni anche quegli altri dominii, finora definiti soltanto con disuguaglianze e limitazioni, il cui contorno o giace tutto all'infinito o, se comprende delle parti giacenti al finito, queste sono tali che si stendono esse stesse all'infinito.

[1] *Equazioni che rappresentano dominii rettangolari e circolari di un* S(n) pubblicata in questo « Bollettino » nel fascicolo di Aprile del corrente anno.

1. **Equazioni di intieri spazii.** — La possibilità di formare, ed in varii modi, queste equazioni, risulta dalla esistenza di proprietà comuni ai valori delle coordinate di tutti i punti dello spazio considerato. Così ad esempio l'intiera retta, l'intiero piano e l'intiero spazio possono essere rappresentati dalle tre equazioni

$$\mathrm{I}\,\frac{x \operatorname{sgn} x}{k^2 + x \operatorname{sgn} x} = 0 \tag{1}$$

$$\operatorname{sgn}^2 x + \operatorname{sgn}^2 y = 2 \tag{2}$$

$$x \operatorname{sgn} x + y \operatorname{sgn} y + z \operatorname{sgn} x = \frac{1}{\mathrm{I}^{-1} 0} - 1 \tag{3}$$

fondate ognuna su di una proprietà diversa [1].

La (1) è fondata sul principio che se al valore assoluto, $\operatorname{mod} x = x \operatorname{sgn} x$, di una quantità qualsiasi, si aggiunge una quantità positiva k^2, il rapporto fra una di queste due parti e la loro somma riesce < 1; perciò la (1) sussiste per qualunque valore di x compreso fra $-\infty$ e $+\infty$ incluso lo zero.

Aggiungendo al termine del primo membro il termine analogo in y, od anche quello analogo in z, si ha l'equazione del piano, o dello spazio, sempre inclusa l'origine e gli assi o i piani coordinati [2].

La (2) è fondata sulla proprietà che il quadrato di una quantità, positiva o negativa, è sempre positivo; ma poichè per $x = 0$ si conviene di attribuire il valore zero alla funzione $\operatorname{sgn} x$, così la (2) rappresenta tutto il piano esclusa l'origine e i due assi. Volendo includere nella (2) anche gli assi basta aggiungere per ognuna delle coordinate un termine, come ad es. $\mathrm{I}\,\dfrac{1 - \mathrm{Fr}\, x}{1 + x \operatorname{sgn} x}$, che

(1) In queste equazioni indico con Ix, come nella precedente nota, la funzione « *intiero di* x »; invece della notazione più breve ma arbitraria $|x|$ comunemente usata, adopero l'altra più completa ed esplicita $x \operatorname{sgn} x$; indico infine con $\mathrm{I}^{-1} N$ la funzione « *numero la cui parte intiera è* N » ossia la funzione inversa di Ix; applicazioni diverse di questa funzione $\mathrm{I}^{-1} N$, così definita in una mia nota, R. Acc. Naz. dei Lincei, 22 aprile 1923, sono indicate nei miei due scritti *Sulla esprimibilità mediante equazioni di taluni vincoli finora rappresentati in meccanica con disuguaglianze e limitazioni*, « Il Politecnico » n. 11, dicembre 1923, e *Un metodo per la rappresentazione analitica sotto forma finita delle funzioni periodiche poligonali comunque irregolari*, « Elettrotecnica » n. 19-20-21, luglio 1924.

(2) Però anche con un sol termine la (1) si può concepire come equazione di un piano costituito da rette perpendicolari all'asse OX e dello spazio costituito da piani perpendicolari allo stesso asse.

prende il valore $+1$ per $x=0$ ed è zero per ogni altro valore di x, [1] cosicchè

$$\text{(5)}\qquad \mathrm{sgn}^2\, x+\mathrm{sgn}^2\, y+\mathrm{I}\,\frac{1-\mathrm{Fr}\, x}{1+x\,\mathrm{sgn}\, x}+\mathrm{I}\,\frac{1-\mathrm{Fr}\, y}{1+y\,\mathrm{sgn}\, y}=2$$

è l'equazione del piano [2] completo, compresi gli assi e l'origine.

La (3) infine è fondata sulla proprietà che la somma dei moduli delle tre coordinate prende tutti i valori da zero a $+\infty$ e gli stessi valori prende il termine al secondo membro poichè I_0^{-1} rappresenta l'insieme dei numeri reali compresi nell'intervallo $O, +1$. La (3) perciò rappresenta l'intiero spazio compresi i piani coordinati, gli assi ed anche l'origine [3].

2. **Equazioni di semispazii.** — Il semiasse delle x positive, esclusa ed inclusa l'origine, è rappresentato rispettivamente dalle due equazioni

$$(+x)\quad\begin{cases}\mathrm{sgn}\, x-1=0 & \text{(5)}\\ \mathrm{sgn}^2\, x-\mathrm{sgn}\, x=0 & \text{(6)}\end{cases}$$

le quali nel piano rappresentano pure il semi piano delle x positive, escluso ed incluso l'asse delle y e nello spazio il semi spazio delle x positive escluso ed incluso il piano YOZ che lo limita.

Analogamente si ha per i semi spazii delle x negative

$$(-x)\quad\begin{cases}\mathrm{sgn}\, x+1=0 & \text{(7)}\\ \mathrm{sgn}^2\, x+\mathrm{sgn}\, x=0 & \text{(8)}\end{cases}$$

3. **Equazioni dei quadranti del piano.** — Per i quadranti del piano, secondo che le coordinate sono dello stesso segno o di segno diverso, si hanno equazioni del tipo

$$(+x,\ +y)\quad\begin{cases}\mathrm{sgn}\, x+\mathrm{sgn}\, y=2 & \text{(9)}\\ \mathrm{sgn}^2\, x+\mathrm{sgn}^2\, y-\mathrm{sgn}\, x-\mathrm{sgn}\, y=0 & \text{(10)}\end{cases}$$

$$(-x,\ +y)\quad\begin{cases}\mathrm{sgn}^2\, x-\mathrm{sgn}\, x+\mathrm{sgn}\, y=3 & \text{(11)}\\ \mathrm{sgn}^2\, x+\mathrm{sgn}^2\, y+\mathrm{sgn}\, x-\mathrm{sgn}\, y=0; & \text{(12)}\end{cases}$$

(1) Indico qui, come negli altri miei scritti, con il simbolo $\mathrm{Fr}\, x$, la funzione « frazione di x » (cioè $x-Ix$) chiamata anche mantissa di x ed indicata pure con i simboli $M(x)$, $\beta(x)$, $\rho(x)$.

(2) Essa è però anche l'equazione dell'intiero spazio considerato come un cilindro o prisma solido la cui sezione retta è il piano XOY.

(3) La (3) rappresenta lo spazio costituito da un insieme di ottaedri regolari con gli spigoli giacenti nei piani coordinati e il centro dell'origine.

analogamente a queste si formerebbero le equazioni per gli altri due quadranti.

Si osservi che l'equazione

$$(13)\qquad \left.\begin{matrix}(-x, +y)\\ (+x, -y)\end{matrix}\right\} \operatorname{sgn} x + \operatorname{sgn} y = 0$$

rappresenta l'insieme dei due quadranti con le coordinate di segni diversi, nel mentre l'equazione

$$(14)\qquad \left.\begin{matrix}(+x, +y)\\ (-x, -y)\end{matrix}\right\} \left[\operatorname{sgn} x + \operatorname{sgn} y\right]^2 = 4$$

rappresenta l'insieme degli altri due quadranti opposti con le coordinate entrambe dello stesso segno.

Si possono d'altra parte costruire delle funzioni che prendono valori diversi nei diversi quadranti, così la funzione

$$(15)\qquad 1 + 2 \operatorname{sgn} x + 3 \operatorname{sgn} y$$

prende nei quadranti $(+x, +y)$, $(-x, +y)$, $(-x, -y)$, $(+x, -y$ rispettivamente i valori $+6$, $+2$, -4, 0 e quindi uguagliandola ad uno di questi valori si ottiene l'equazione del quadrante corrispondente [1].

4. **Equazioni degli ottanti dello spazio.** — Per i tre ottanti nei quali sono positive o tutte le coordinate, o due di esse od una soltanto si hanno delle coppie di equazioni del tipo:

$$\begin{matrix}(16)\\ (17)\end{matrix}\qquad (+x, +y, +y)\ \left\{\begin{aligned}&\operatorname{sgn} x + \operatorname{sgn} y + \operatorname{sgn} z = 3\\ &\operatorname{sgn}^2 x + \operatorname{sgn}^2 y + \operatorname{sgn}^2 z - \operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} y -\\ &\qquad - \operatorname{sgn} z = 0\end{aligned}\right.$$

$$\begin{matrix}(18)\\ (19)\end{matrix}\qquad (+x, +y, -z)\ \left\{\begin{aligned}&\operatorname{sgn} x + \operatorname{sgn} y - \operatorname{sgn} z = 3\\ &\operatorname{sgn}^2 x + \operatorname{sgn}^2 y + \operatorname{sgn}^2 z - \operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} y +\\ &\qquad + \operatorname{sgn} z = 0\end{aligned}\right.$$

$$\begin{matrix}(20)\\ (21)\end{matrix}\qquad (+x, -y, -z)\ \left\{\begin{aligned}&\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} y - \operatorname{sgn} z = 3\\ &\operatorname{sgn}^2 x + \operatorname{sgn}^2 y + \operatorname{sgn}^2 z - \operatorname{sgn} x + \operatorname{sgn} y +\\ &\qquad + \operatorname{sgn} z = 0\end{aligned}\right.$$

[1] È chiaro poi che le equazioni dei quadranti del piano sono anche le equazioni dei diedri solidi che hanno i quadranti come sezione retta e l'asse delle z come spigolo.

nelle quali, al solito, la prima equazione rappresenta l'ottante esclusi i piani coordinati, e quindi gli assi e l'origine, la seconda lo stesso ottante inclusi i detti elementi.

La legge di formazione per gli altri ottanti è evidente.

Anche quì si possono scrivere equazioni che comprendono raggruppati insieme due o più ottanti: ad esempio l'equazione

$$(22)\qquad \left.\begin{matrix}(+x, & +y, & +z)\\ (-x, & -y, & -z)\end{matrix}\right\} \left[\operatorname{sgn} x + \operatorname{sgn} y + \operatorname{sgn} z\right]^2 = 9$$

rappresenta i due ottanti opposti che hanno le tre coordinate tutte dello stesso segno.

5. **Equazioni di striscie del piano e di strati dello spazio.** — Avvalendosi della funzione inversa di Ix già menzionata, e cioè di $\Gamma^{-1} N$, si scrivono facilmente le equazioni dei tre strati di spessore h, i, k limitati da piani normali agli assi OX, OY, OZ che essi tagliano alle distanze dall'origine a e $a+h$, b e $b+i$, c e $c+k$ rispettivamente

$$\begin{matrix}(23)\\[1em](24)\\[1em](25)\end{matrix}\qquad\qquad (A)\left\{\begin{aligned} x &= a + h\,\Gamma^{-1}\, 0\\ y &= b + i\,\Gamma^{-1}\, 0\\ z &= c + k\,\Gamma^{-1}\, 0\end{aligned}\right.$$

Queste tre equazioni rappresentano anche, in ciascuno dei due piani passanti per l'asse corrispondente, la striscia sezione retta dello strato che l'equazione rappresenta.

Nelle striscie, o negli strati, così rappresentate sono incluse le rette, o i piani, che le limitano più vicine all'origine e sono escluse invece le rette, o i piani, più lontane.

6. **Coordinate elementari.** — Poichè il sistema di due delle equazioni (A) definisce nel piano che ad esse corrisponde il rettangolo intersezione delle due striscie rappresentate e le tre equazioni insieme definiscono, nello spazio, il parallelepipedo, di lati h, i, k intersezione dei tre strati, si scorge che se le costanti a, b, c si assoggettano alla condizione di essere multipli di h, i, k rispet-

tivamente, scrivendo

$$
\text{(B)} \quad
\begin{cases}
x - h\left(A + \Big|_{0}^{-1}\right) & (26) \\
y = i\left(B + \Big|_{0}^{-1}\right) & (27) \\
z = k\left(C + \Big|_{0}^{-1}\right) & (28)
\end{cases}
$$

dove A, B, C sono dei numeri intieri, due delle espressioni (B) potranno essere assunte come coordinate del piano immaginato costituito da elementi rettangolari invece che da punti e le tre espressioni insieme come coordinate dello spazio immaginato costituito da elementi parallelepipedi di lati h, i, k. Così ad ogni coppia di numeri intieri le (B) fanno corrispondere un rettangolo del piano e ad ogni terna, sempre di numeri intieri, un parallelepipedo dello spazio.

Obbligando questi valori intieri a soddisfare delle condizioni assegnate si definiscono nel piano e nello spazio dei dominii i quali al tendere poi a zero di h, i, k si confondono al limite coi dominii corrispondenti i cui contorni sono determinati da linee e superfici definite con equazioni fra coordinate ordinarie di punti.

Roma, 31 marzo 1927.