Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Luigi Galvani

Dei limiti a cui tendono alcune medie

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (1927), n.4, p. 173–179.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_4_173_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1927.

Dei limiti a cui tendono alcune medie.

Nota di LUIGI GALVANI (a Roma).

1. È ben noto che se una successione $a_1 a_2 ... a_n ...$ ammette un limite finito e determinato λ, anche la media aritmetica dei primi n termini tende, per n infinito, allo stesso limite λ.

Di qui possiamo immediatamente dedurre che: *se una successione* $a_1 a_2 ... a_n ...$ *di numeri positivi tende ad un limite* λ, *anche la successione* $y_1 y_2 ... y_n ....$, *essendo*

$$(1) \qquad y_n(x) = \left(\frac{a_1^x + a_2^x + ... + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}, \qquad (x \text{ reale})$$

e intendendo di assumere per questa espressione la sola determinazione reale positiva, tende allo stesso limite λ, *per qualunque valore di* x *che non faccia perdere significato alla* (1), *cioè per ogni* $x \neq 0$.
Difatti, se $\lim a_n = \lambda$, è $\lim a_n^x = \lambda^x$ e perciò anche

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_1^x + a_2^x + ... + a_n^x}{n} = \lambda^x,$$

il che prova l'asserto, quando si tenga presente che si è convenuto di assumere per la (1) il valore reale positivo.

Per $x=0$ la (1), considerata come funzione reale della x, non ha valore determinato ed ammette ivi una discontinuità di prima specie, mentre essa è finita e continua per ogni altro valore di x; pertanto quella discontinuità può essere tolta assumendo convenzionalmente come valore della (1) per $x=0$ il $\lim_{x=0} y_n(x)$. Ora si può, col DUNKEL (¹), dimostrare che

$$\lim_{x=0} y_n(x) = \lim_{x=0} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + ... + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n},$$

e poichè, nell'ipotesi iniziale di $\lim a_n = \lambda$, si sa anche che

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} = \lim_{n=\infty} a_n = \lambda,$$

(¹) *Generalized geometric means and algebraic equations.* « Annals of Mathematics » Vol. 11, 1909-1910.

così il teorema enunciato si può completare dicendo: *se* $a_n > 0$ *e* $\lim\limits_{n=\infty} a_n = \lambda$, *la funzione* $y_n(x)$ *così definita:*

$$(2) \qquad y_n(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} & \text{per } x \neq 0 \\ \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

tende, per n *infinito e per qualunque valore reale di* x, *allo stesso limite* λ.

La (2), come funzione della sola x, è stata studiata dal DUNKEL (l. c.) e proposta a rappresentare una « media » in senso generale dei numeri positivi $a_1 a_2 \ldots a_n$ in quanto, per ognuno di tali sistemi finiti di numeri, essa è funzione simmetrica degli stessi, ha un valore compreso fra il loro massimo ed il loro minimo, e si riduce ad assumere il valore λ se $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \lambda$ [1]. Si potrà dunque concludere che *se* $a_n > 0$ *e* $\lim\limits_{n=\infty} a_n = \lambda$, *qualunque media generalizzata nel senso di Dunkel dei numeri* $a_1, a_2, \ldots a_n$ *(e in particolare la media armonica, la geometrica, l'aritmetica, la quadratica) tende allo stesso limite* λ *per* $\lim n = \infty$.

2. Si sa che se la $a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ non tende ad un limite, ma si può scindere in r successioni (r finito) ciascuna delle quali tenda ad un limite $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_r$ e $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_r$ sono le probabilità che un termine generico della data successione appartenga rispettivamente alla prima, seconda, ...r^a successione parziale, allora la successione delle medie aritmetiche e quella delle medie geometriche (qui bisogna naturalmente supporre $a_n > 0$) tendono rispettivamente a $\lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2 + \ldots + \lambda_r \pi_r$ ed a $\lambda_1^{\pi_1} \cdot \lambda_2^{\pi_2} \ldots \lambda_r^{\pi_r}$ [2]. Di qui si trae subito che se per la successione a termini positivi $a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ si possono fare le ipotesi ora dette, la media generalizzata di DUNKEL per qualunque valore reale dell'esponente $x \neq 0$ tende al limite

$$\sqrt[x]{\lambda_1^x \pi_1 + \lambda_2^x \pi_2 + \ldots + \lambda_r^x \pi_r}$$

[1] L'espressione (2), detta dal DUNKEL « media continua », è anche notevole perchè atta a rappresentare le varie medie usualmente impiegate: così per $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ essa si identifica rispettivamente con la media armonica, con la geometrica, con l'aritmetica, con la quadratica. Di più

$$\lim_{x=-\infty} y_n(x) = \min(a_1, a_2, \ldots a_n); \qquad \lim_{x=\infty} y_n(x) = \max(a_1, a_2, \ldots a_n)$$

[2] CESARO: *Analisi Algebrica*. Cap. XVIII.

e per $x=0$ tende al limite

$$\lambda_1^{\pi_1 x}\cdot\lambda_2^{\pi_2 x}\ldots\lambda_\nu^{\pi_\nu x}.$$

Dunque, quando la successione a termini positivi $a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ non tende ad un limite, le medie generalizzate nel senso di DUNKEL tendono generalmente a limiti diversi per i diversi valori di x (o non tendono a nessun limite).

3. Vediamo come il concetto di « media » nel senso del DUNKEL possa essere esteso al caso di una variabile reale continua t fra a e b ($b > a > 0$). Immaginando di dividere l'intervallo $(a \ldots b)$ in n parti uguali di ampiezza h, si potrà analogamente alla (1) considerare la funzione

$$y(x)=\left(\frac{a^x+(a+h)^x+\ldots+(a+(n-1)h)^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=$$
$$=\sqrt[x]{\frac{a^x h+(a+h)^x h+\ldots+(a+(n-1)h)^x h}{b-a}},$$

dalla quale passando al limite per $n=\infty$ risulterà per ogni $x \neq 0$:

$$(3)\qquad y=\sqrt[x]{\frac{\int_a^b t^x dt}{b-a}}=\begin{cases}\sqrt[x]{\dfrac{b^{x+1}-a^{x+1}}{(x+1)(b-a)}} & \text{per } x\neq -1\\[2ex] \dfrac{b-a}{\log b-\log a} & \text{per } x=-1\end{cases}$$

mentre per $x=0$ assumeremo convenzionalmente:

$$(3')\qquad y=\frac{1}{e}\sqrt[b-a]{\frac{b^b}{a^a}}.$$

Dimostriamo anzitutto che la y così definita è una funzione continua, ossia che l'espressione

$$(4)\qquad y=\sqrt[x]{\frac{b^{x+1}-a^{x+1}}{(x+1)(b-a)}}$$

la quale ha valore finito e determinato per ogni $x \neq (-1, 0)$, tende rispettivamente ai limiti

$$\frac{b-a}{\log b-\log a}\quad \text{ed}\quad \frac{1}{e}\sqrt[b-a]{\frac{b^b}{a^a}}$$

per x tendente a -1 e tendente a 0. Difatti, assumendo il logaritmo naturale di $\bar{y}$ ed applicando la regola di L'Hôpital si ha subito:

$$\lim_{x=-1} \log \bar{y} = \lim \left\{ \frac{1}{x} \log \frac{b^{x+1} - a^{x+1}}{(x+1)(a-b)} \right\} = \log \lim \frac{(x+1)(b-a)}{b^{x+1} - a^{x+1}} =$$

$$= \log \lim \frac{b-a}{b^{x+1} \log b - a^{x+1} \log a} = \log \frac{b-a}{\log b - \log a};$$

$$\lim_{x=0} \log \bar{y} = \lim \frac{\log (b^{x+1} - a^{x+1}) - \log (x+1) - \log (b-a)}{x} =$$

$$= \lim \frac{\dfrac{b^{x+1} \log b - a^{x+1} \log a}{b^{x+1} - a^{x+1}} - \dfrac{1}{x+1}}{1} = \frac{b \log b - a \log a}{b-a} - 1 =$$

$$= \log \left(\frac{1}{e} \sqrt[b-a]{\frac{b^b}{a^a}} \right).$$

Si ha inoltre, analogamente a quanto accade per la funzione del Dunkel:

$$\lim_{x=-\infty} \log \bar{y} = \lim \log \sqrt[x]{\frac{a^{x+1} - b^{x+1}}{(-x-1)(b-a)}} =$$

$$= \lim \frac{\log (a^{x+1} - b^{x+1}) - \log (-x-1) - \log (b-a)}{x} =$$

$$= \lim \frac{(x+1) \log a + \log \left\{ 1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{-x-1} \right\} - \log (-x-1) - \log (b-a)}{x} = \log a$$

$$\lim_{x=\infty} \log \bar{y} = \lim \frac{(x+1) \log b + \log \left\{ 1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{x+1} \right\} - \log (x+1) - \log (b-a)}{x} = \log b$$

vale a dire per x tendente a $-\infty$ ed a $+\infty$ la $\bar{y}$ tende rispettivamente ai limiti a e b, che sono il minimo ed il massimo dei valori assunti dalla variabile continua t.

Infine, per ogni valore reale di x il valore della (3) è compreso fra a e b. Dunque *le* (3) *e* (3') *definiscono in* (a, b) *una funzione che avendo gli stessi requisiti della funzione di Dunkel si può considerare come atta a rappresentare una « media continua » della totalità dei numeri reali fra* a *e* b; *in questo senso le medie armonica, geometrica, aritmetica, quadratica dei numeri stessi si* *avranno in corrispondenza ai valori* $-1, 0, 1, 2$ *di* x *è quindi saranno:*

$$\frac{b-a}{\log b - \log a}, \quad \frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}, \quad \frac{b+a}{2}, \quad \sqrt{\frac{b^2+ba+a^2}{3}}.$$

4. Un'altra estensione del concetto di media di più numeri $a_1 a_2 \dots a_n$, che supponiamo reali positivi, si può avere tenendo presente una proprietà caratteristica della media aritmetica, e cioè che la somma algebrica degli scostamenti di tale media dai numeri dati si annulla. Se, più in generale, si chiede di determinare X così che si annulli la somma algebrica dei prodotti degli scostamenti combinati a k a k $(k \leq n)$ in tutti i modi possibili:

$$(5) \qquad \Sigma s_{p_1} s_{p_2} \dots s_{p_k} = \Sigma (X - a_{p_1})(X - a_{p_2}) \dots (X - a_{p_k}) = 0,$$

vi è luogo a risolvere l'equazione

$$(5') \qquad \binom{n}{k} X^k - \binom{n-1}{k-1} \sum a_i X^{k-1} + \binom{n-2}{k-2} \sum a_i a_j X^{k-2} + \dots + \\ + (-1)^k \sum a_{p_1} a_{p_2} \dots a_{p_k} = 0$$

avente per radici k numeri $X_{k1}, X_{k2}, \dots X_{kk}$ che si potranno dire « medie aritmetiche » di k^o ordine dei numeri dati. Le medie di ordine n coincidono coi numeri stessi. Evidentemente il primo membro della (5') si identifica, all'infuori del fattore $(n-k)!$, con $D^{n-k} f(X)$, avendo posto

$$(6) \qquad f(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - a_i),$$

e pertanto quelle che abbiamo detto « medie » di $1^o, 2^o, \dots k^o \dots$ ordine dei numeri a_i non sono altro che le radici delle derivate $n-1^a, n-2^a, \dots n-k^a, \dots$ della (6). Tale denominazione è peraltro giustificata dall'osservare che:

a) queste medie si possono effettivamente assumere, ordine per ordine, a dare una espressione via via meno sintetica del sistema dei numeri a_i;

b) esse godono delle proprietà generiche delle medie quanto al dovere essere funzioni simmetriche dei numeri dati e all'essere comprese fra il minimo e il massimo di essi. Inoltre, essendo $n > h > k$, le medie di ordine k dei numeri dati sono anche le medie di ordine h delle medie di ordine h degli stessi numeri.

Proponiamoci anche qui di vedere quale sia il comportamento delle varie medie quando il sistema dei numeri positivi a_i divenga infinito, e a tale scopo ricordiamo che se si pone

$$S_q = \sum_{i=1}^{n} s_i{}^q = \sum_{i=1}^{u} (X - a_i)^q,$$

l'equazione (5) che fornisce le medie di k^0 ordine si potrà scrivere nella forma

$$\sum s_{p_1} s_{p_2} \ldots s_{p_k} = \frac{(-1)^k}{k!} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & -S_1 \\ S_1 & 2 & \ldots & 0 & -S_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{k-1} & S_{k-2} & \ldots & S_1 & -S_k \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

Ciò posto, si supponga in primo luogo che i numeri a_i percorrano una successione tendente a λ. Scrivendo la (7) nella forma

$$\frac{(-1)^k n^k}{k!} \begin{vmatrix} \frac{1}{n} & 0 & \ldots & 0 & X - \frac{\Sigma a_i}{n} \\ X - \frac{\Sigma a_i}{n} & \frac{2}{n} & \ldots & 0 & -\frac{S_2}{n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{S_{k-1}}{n} & \frac{S_{k-2}}{n} & \ldots & X - \frac{\Sigma a_i}{n} & -\frac{S_k}{n} \end{vmatrix} = 0,$$

passando al limite per n infinito e notando che allora i termini della diagonale principale (tranne l'ultimo) tendono a 0, che i termini $X - \frac{\Sigma a_i}{n}$ tendono a $X - \lambda$, e che (per il n. 1) i termini della forma

$$\frac{S_r}{n} = \frac{1}{n} \sum (X^r - r a_i X^{r-1} \ldots \pm a_i{}^r)$$

tendono a: $X^r - rX^{r-1}\lambda \ldots \pm \lambda^r$, si ottiene l'equazione:

$$(X - \lambda)^k = 0$$

la quale significa che *quando* $\lim a_i = \lambda$ *le medie aritmetiche di qualunque ordine tendono allo stesso limite* λ (cioè coincidono con la media aritmetica di 1° ordine).

Alla stessa conclusione si perviene anche se la successione a_i non tende ad un limite, ma si scinde in un numero finito di successioni tendenti a limiti finiti.

Infine se i numeri dati assumono i valori della variabile continua t fra a e b ($b > a > 0$), si ha anzitutto dall'equazione (7)

$$\begin{vmatrix} \Delta t & 0 \; \ldots \; 0 & \Sigma(X-t)\Delta t \\ \Sigma(X-t)\Delta t & 2\Delta t \; \ldots \; 0 & \Sigma(X-t)^2\Delta t \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ \Sigma(X-t)^{k-1}\Delta t & \ldots & \Sigma(X-t)^k\Delta t \end{vmatrix} = 0$$

e passando al limite:

$$\left(\int_a^b (X-t)dt\right)^k = 0$$

cioè, *anche in questo caso le medie aritmetiche di qualunque ordine vengono a coincidere in un unico valore*

$$X = \frac{\int_a^b t dt}{\int_a^b dt} = \frac{a+b}{2}$$

costituente la media aritmetica (baricentro) *di quel continuo.*