Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Bruno Finzi

Potenza della corrente che investe un arco di circonferenza

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (1927), n.4, p. 169–172.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_4_169_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1927.

PICCOLE NOTE

Potenza della corrente che investe un arco di circonferenza.

Nota di BRUNO FINZI (a Milano).

Un profilo rigido, costituito da una lamina foggiata ad arco di circonferenza, è investito da una corrente continua, traslatoria, piana, irrotazionale, di velocità asintotica c. BICKLEY [1] valutò le azioni dinamiche che si esercitano sull'arco, e trovò una componente R_x della risultante delle pressioni secondo c; risultato questo in apparente contraddizione con il ben noto paradosso di D'ALEMBERT. La contraddizione scompare se si tien conto che, nel caso in esame, la velocità della corrente diviene infinita agli estremi della lamina.

In una Nota recente [2] valutai la potenza di una corrente traslo-circolatoria, piana, irrotazionale, investente un profilo rigido, in presenza di singolarità al contorno, e ne feci applicazione ad un profilo costituito da una lamina rettilinea. Se la circolazione è nulla, nulla risulta, nel caso esaminato, la potenza. Desidero mettere ora in evidenza un caso in cui, pur in assenza di circolazione, la potenza della corrente non è nulla. Il caso scelto è appunto quello del BICKLEY: quello cioè di una corrente soltanto traslatoria che investe un arco di circonferenza. Troverò che l'energia cinetica della corrente non è costante, e che quindi la corrente stessa non è spontanea. Per mantenerla occorre un motore di potenza $R_x c$.

(1) *Some Two-Dimensional Potential Problems connected with the Circular Arc.* « Philosophical Magazine », 1918, vol. XXXV, pag. 396; vol. XXXVI, pag. 273.

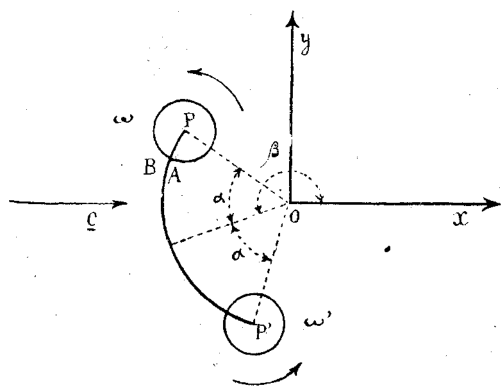
(2) B. FINZI: *Interpretazione energetica di una notevole eccezione del teorema di Kutta-Joukowski.* Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei, vol. V, serie 6ª, 1° sem. 1927.

***

Assumiamo uguale ad uno il raggio dell'arco di circonferenza, poniamo l'origine delle coordinate nel centro dell'arco, diciamo 2α l'angolo al centro, e β l'angolo che il raggio mediano forma con l'asse x, diretto come c. Consideriamo il piano della variabile complessa $z = x + iy$, che riguardiamo tagliato secondo l'arco di circonferenza. In questo piano il potenziale complesso $f = \varphi + i\psi$, sarà definito, a meno di una costante additiva, dalla seguente relazione [1]:

$$(1)\quad f = \frac{c}{2}\left(z + \frac{1}{z} - 2\cos\beta\right) \pm \frac{c}{2}\left(1 + \frac{e^{-i\beta}}{z}\right)\sqrt{(z - e^{i(\beta+\alpha)})(z - e^{i(\beta-\alpha)})},$$

nella quale il segno $+$ si riferisce alla parte convessa, e il segno $-$ alla parte concava. La risultante R delle azioni dinamiche che la



corrente di densità ρ, esercita sull'arco, risulta allora definita dalle relazioni seguenti [2]:

$$(2)\quad \begin{cases} R_x = -\rho c^2\pi \operatorname{sen}^2\alpha\left[\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos\beta\cos 2\beta + \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}2\beta\right], \\ R_y = \rho c^2\pi \operatorname{sen}^2\alpha\left[\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\beta\cos 2\beta - \cos^2\frac{\alpha}{2}\cos\beta\operatorname{sen}2\beta\right]. \end{cases}$$

Sia T l'energia cinetica della corrente, t il tempo, p la pressione, ω ed ω' due circonferenze con centro negli estremi della

(1) U. Cisotti: *Idromeccanica piana*, parte prima (Milano 1921, pag. 125).
(2) U. Cisotti: loco citato, pag. 126.

lamina P e P', e raggio infinitesimo. Sarà [1]:

$$\frac{dT}{dt} = \int_{\omega} p d\psi + \int_{\omega'} p d\psi, \tag{3}$$

e gli integrali saranno valutati nel senso delle frecce (vedi figura).

Per la valutazione del primo integrale, che compare nel secondo membro della (3), poniamo

$$z = e^{i(\beta-\alpha)} + \varepsilon e^{i(\beta-\alpha+\lambda)}, \tag{4}$$

nella quale consideriamo ε infinitesimo, e $-\frac{3\pi}{2} \leq \lambda \leq \frac{\pi}{2}$. Poi che $e^{i(\beta-\alpha)}$ ha per indice il punto P, ad ogni valore di λ si avrà un punto di una circonferenza di centro P e raggio ε, circonferenza che abbiamo detto ω. Per $\lambda = -\frac{3\pi}{2}$ si ha il punto A sulla lamina, per $\lambda = \frac{\pi}{2}$ il punto B, pure sulla lamina, affacciato ad A.

In virtù della (1) e della (4), sarà, a meno di termini infinitesimi:

$$W = \frac{df}{dz} = h \pm \frac{k}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-i\frac{\lambda}{2}}, \tag{5}$$

essendo

$$\left\{ \begin{aligned} h &= \frac{c}{2}(1 - e^{-2i(\beta-\alpha)}), \\ k &= \frac{c}{4}(1 + e^{-i(2\beta-\alpha)}) e^{-i\frac{\beta-\alpha}{2}} \sqrt{e^{i(\beta-\alpha)} - e^{i(\beta+\alpha)}} \end{aligned} \right. \tag{6}$$

Se $\bar{h}$ è il complesso coniugato di h, $\bar{k}$ il complesso coniugato di k, il quadrato della velocità in ogni punto sarà definito, a meno di termini finiti, dalla seguente relazione:

$$v^2 = \frac{k\bar{k}}{\varepsilon} \pm \frac{h\bar{k}}{\sqrt{\varepsilon}} e^{i\frac{\lambda}{2}} \pm \frac{\bar{h}k}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-i\frac{\lambda}{2}}. \tag{7}$$

Ricordando la (1) sarà, a meno di termini infinitesimi,

$$v^2 df = \frac{k\bar{k}}{\varepsilon} df + hk\bar{k}ie^{i(\beta-\alpha)} e^{i\lambda} d\lambda + \bar{h}k^2 ie^{i(\beta-\alpha)} d\lambda. \tag{8}$$

Integrando tra A e B si avrà [2]:

$$\int_{\omega} v^2 df = 2\pi i \bar{h} k^2 e^{i(\beta-\alpha)},$$

[1] B. Finzi: loco citato, formula (5).

[2] Dalla (1) e la (4) scende tosto $f(B) - f(A) = 0$.

ossia, ricordando le (6),

$$\int_\omega v^2 df = -\pi c^3 i \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} (\beta - \alpha) \cos^2\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Allora, manifestamente:

$$\int_\omega p d\psi = \frac{\rho}{2} \pi c^3 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} (\beta - \alpha) \cos^2\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right). \tag{9}$$

Valutiamo il secondo integrale che compare nella (3). Poniamo:

$$z = e^{i(\beta + \alpha)} + \varepsilon e^{i(\beta + \alpha + \lambda)}, \tag{4'}$$

nella quale ε è infinitesimo, e $-\frac{\pi}{2} \leq \lambda \leq \frac{3\pi}{2}$. Poi che $e^{i(\beta + \alpha)}$ ha per indice il punto P', facendo variare λ tra i limiti fissati si otterranno tutti i punti di ω'. Operando come nel caso precedente, le relazioni trovate resteranno immutate, purchè in esse si muti α in $-\alpha$. In particolare si avrà:

$$\int_{\omega'} p d\psi = \frac{\rho}{2} \pi c^3 \operatorname{sen} (-\alpha) \operatorname{sen} (\beta + \alpha) \cos^2\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right). \tag{9'}$$

Risulta allora, dopo ovvie semplificazioni:

$$\int_\omega p d\psi + \int_{\omega'} p d\psi = -\rho\pi c^3 \left| \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos \beta \cos 2\beta + \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} 2\beta \right|. \tag{10}$$

Ricordando allora la (3) e la prima delle (2), si avrà:

$$\frac{dT}{dt} = R_x c. \tag{11}$$

Così come ho annunciato. Osservo che la potenza, definita dalla (11), è precisamente uguale a quella necessaria a far avanzare con velocità $-c$ l'arco in seno al liquido, supposto in quiete all'infinito. Osservo anche che l'accumulo di energia cinetica avviene tutto sui bordi della lamina. Infatti: se si considera una linea di flusso, prossima quanto si vuole all'arco, e si valuta la derivata rispetto al tempo dell'energia cinetica della massa liquida esterna ad essa, si trova che tale derivata è nulla [1], così che l'accumulo di energia, che la formula (11) fa prevedere, avviene tutto su la lamina.

[1] B. FINZI: loco citato, cfr. ultima nota del n. 1.