UMI

Sunti di lavori italiani

* Lavori di: Ernesta Porcu-Tortrini

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (1927), n.3, p. 146–147.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_3_146_0>

SUNTI DI LAVORI ITALIANI

ERNESTA PORCU-TORTRINI: *Sulle potenze delle matrici di secondo ordine.* (Atti della Pontificia Accademia delle Scienze, anno LXXX, pp. 150-153, seduta del 20 febbraio 1927).

— — *Calcolo delle potenze delle matrici di secondo ordine, mediante la riduzione alla forma canonica.* (Ibid., anno LXXX, seduta del 24 aprile 1927).

Considerando una matrice, cioè un simbolo di trasformazione lineare del tipo

$$\Phi = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$$

e ritenendo, come di consueto che Φ^n indichi la matrice equivalente alla trasformazione lineare iterata n^{sima} della trasformazione Φ, l'A. ha fatto la ricerca di espressioni generali per Φ^n, le quali espressioni per ogni n dato si possono bensì ottenere per moltiplicazione diretta ma ricercate per questa via riescono eccessivamente complicate.

Un primo metodo applicato dall'A. è fondato nell'uso dell'equazione caratteristica di CAYLEY a cui soddisfa la Φ, cioè

$$\Phi^2 = \gamma\Phi - \delta$$

dove γ e δ sono i due invarianti della matrice, cioè

$$\gamma = \text{invariante diagonale} = a + d,$$
$$\delta = \text{determinante della matrice} = ad - bc.$$

Moltiplicando una, due,.... n volte l'equazione caratteristica, e combinando con l'equazione stessa si hanno relazioni ricorrenti le quali conducono all'espressione generale

$$\Phi^n = f_{(n+1)}\Phi - f_{(n)}\delta.$$

La funzione $f_{(n)}$ risulta data da

$$f_{(n)} = \sum_{m=1}^{m=M} (-1)^{m-1} \binom{n-m-1}{m-1} \gamma^{n-2m}\delta^{m-1}$$

dove M è il massimo intero contenuto in $\frac{n}{2}$, mentre $\binom{r}{s}$ ha il significato combinatorio usuale. Gli sviluppi di Φ^n che conseguono da questo procedimento sono stati dati dall'A. per tutti i valori di n, da $n=2$ fino a $n=15$. Questi sviluppi possono riuscire di molta pratica utilità per la calcolazione dei filtri d'onda elettrici e sistemi consimili.

L'altro procedimento è fondato sulla riduzione di una Φ qualunque alla forma canonica

$$\Phi = \psi \begin{Vmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{Vmatrix} \psi^{-1}$$

dove ρ_1, ρ_2 sono le radici dell'equazione secolare (cioè la stessa equazione caratteristica di cui sopra, ove in luogo di Φ si ponga ρ), supposte distinte, mentre ψ è una matrice opportunamente scelta che ammette molte determinazioni. Applicando questa forma canonica, si ha immediatamente

$$\Phi^n = \psi \begin{Vmatrix} \rho_1^n & 0 \\ 0 & \rho_2^n \end{Vmatrix} \psi^{-1}.$$

Una delle determinazioni della ψ che può applicarsi, e che riesce molto semplice e simmetrica, è la seguente

$$\psi = \begin{Vmatrix} -b & d-\rho_2 \\ a-\rho_1 & -c \end{Vmatrix}.$$

Sostituendola ed effettuando la moltiplicazione, si ottiene Φ^n sotto questa forma particolare

$$\Phi^n = \begin{Vmatrix} \dfrac{bc\rho_1^n - (a-\rho_1)(d-\rho_2)\rho_2^n}{bc-(a-\rho_1)(d-\rho_2)} & \dfrac{b(d-\rho_2)(\rho_1^n-\rho_2^n)}{bc-(a-\rho_1)(d-\rho_2)} \\ \dfrac{c(a-\rho_1)(\rho_2^n-\rho_1^n)}{bc-(a-\rho_1)(d-\rho_2)} & \dfrac{bc\rho_2^n-(a-\rho_2)(d-\rho_1)\rho_1^n}{bc-(a-\rho_1)(d-\rho_2)} \end{Vmatrix}.$$

Anche questa formula può riuscire molto utile pei calcoli pratici di cui detti sopra, e per molti problemi funzionali collegati con sistemi ricorrenti di equazioni alle differenze finite o di equazioni differenziali.