Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Mauro Picone

Nuovo criterio sufficiente per l'esistenza di un estremo per una funzione di punto ed alcune sue applicazioni

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (1927), n.3, p. 128–133.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_3_128_0>

Nuovo criterio sufficiente per l'esistenza di un estremo per una funzione di punto ed alcune sue applicazioni.

Nota di MAURO PICONE (a Napoli).

Il classico teorema di WEIERSTRASS per le funzioni semicontinue di punto si può enunciare, nella sua forma più generale, al modo seguente:

Se la funzione reale $u = f(P)$ *è semicontinua inferiormente (superiormente) nell'insieme* A *chiuso e limitato, di punti di uno spazio* $S_{(r)}$ *ad un numero qualunque* r *di dimensioni, essa è dotata in* A *di minimo (di massimo).*

Di questo teorema che, dunque, fornisce un criterio per la esistenza di un estremo per una funzione di punto, è ben nota la fondamentale importanza nell'Analisi e nelle sue svariate applicazioni; ma ritengo altresì utilissimo il seguente ulteriore teorema che fornisce esso pure un criterio per l'esistenza di un estremo per una funzione di punto $f(P)$ in un insieme A, senza richiedere *proprio* la semicontinuità della funzione in ogni punto comune ad A e al suo derivato, nè che l'insieme sia chiuso e limitato.

1. Per il più generale insieme A di punti di $S_{(r)}$ si può facilmente dimostrare che: *Comunque si assegni un numero positivo* δ, *la totalità dei punti dello spazio aventi da* A *distanza non inferiore a* δ *è sempre un insieme chiuso.* Denoteremo con A_δ tale insieme, e, se P è un punto di $S_{(r)}$, con $\overline{PA}$ la distanza del punto P dall'insieme A.

Dalla circostanza indicata si deduce che:

Per il più generale insieme A *di punti di* $S_{(r)}$ *il prodotto di* A *per l'insieme* $(\mathrm{FA})_\delta$, *dei punti aventi dalla frontiera* FA *di* A [1] *distanza non inferiore a* δ, *è sempre chiuso.*

Ed invero, poichè $A + FA$ è chiuso, per essere $(FA)_\delta$ pur esso chiuso, tale sarà il prodotto

$$(A + FA)(FA)_\delta = (FA)_\delta A.$$

Si osservi che il prodotto $(FA)_\delta A$ sarà sempre vuoto se A non è dotato di punti interni. Nell'altro caso non sarà vuoto se δ è sufficientemente limitato.

Ciò posto, ecco il teorema atto a fornire un nuovo criterio sufficiente per l'esistenza di un estremo per una funzione di punto:

I. *L'insieme* A *sia dotato di punti interni e la funzione* f(P) *sia semicontinua inferiormente in ogni punto interno ad* A. *Se ad un certo punto* Q, *interno ad* A, *si può far corrispondere un punto* O *dello spazio tale che riesca*

$$(1) \qquad \lim_{\substack{\overline{P(FA)} \to 0 \\ \overline{PO} \to \infty}}{}' f(P) > f(Q), \quad f(P)(\text{su } A \cdot FA) > f(Q),$$

la funzione f(P) *è dotata di minimo in* A, *che consegue in un punto interno ad* A. *Se invece la funzione è semicontinua superiormente in ogni punto interno ad* A *e riesce:*

$$(2) \qquad \lim_{\substack{\overline{P(FA)} \to 0 \\ \overline{PO} \to \infty}}{}'' f(P) < f(Q) \ (^2), \quad f(P)(\text{su } A \cdot FA) < f(Q),$$

la funzione è dotata di massimo in A, *che consegue in un punto interno ad* A [3]. *In particolare, se* A *è aperto e per un certo punto* O *dello spazio si ha*

$$(3) \qquad \lim_{\substack{\overline{P(FA)} \to 0 \\ \overline{PO} \to \infty}}{}' f(P) = +\infty, \qquad \text{oppure:} \quad \lim_{\substack{\overline{P(FA)} \to 0 \\ \overline{PO} \to \infty}}{}'' f(P) = -\infty,$$

[1] Seguo le notazioni che ho proposto nel mio libro: *Lezioni d'Analisi infinitesimale.* Circolo matematico di Catania, Catania (R. Università), 1923.

[2] Secondo le notazioni del mio citato libro, lim′ e lim″ denotano il minimo e il massimo limite.

[3] Pertanto, se f è derivabile, rispetto alle coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_r$ di P, in ogni punto interno ad A, il sistema di equazioni $\frac{\partial f}{\partial x_h} = 0 \; (h = 1, 2, \ldots, r)$ possiede sempre, allora, almeno una soluzione.

la funzione è dotata di minimo in $\mathbf{A}$ *oppure di massimo, se, nel primo caso, è semicontinua inferiormente nei punti di* $\mathbf{A}$ *e nel secondo è semicontinua superiormente.*

Potremo limitarci a dimostrare la prima parte del teorema. Diciamo 2δ la distanza di Q da FA e $R/2$ quella da O. Verificandosi le (1) è possibile determinare un numero positivo $\delta' < \delta$ e uno $R' > R$, tali che per ogni punto P di A verificante l'una o l'altra delle seguenti condizioni:

$$\overline{P(FA)} < \delta', \tag{4}$$

$$\overline{PO} > R', \tag{5}$$

si abbia $f(P) > f(Q)$. Se per un punto di A non sono soddisfatte nè la (4), nè la (5), esso apparterrà all'insieme chiuso e limitato $B(\delta', R')$ comune ad A, a $(FA)_{\delta'}$, e al dominio circolare di centro in O e di raggio R'.

In $B(\delta', R')$, per il teorema di WEIERSTRASS, la funzione $f(P)$, che vi è semicontinua inferiormente, è dotata di minimo m. Dico che m è anche il minimo valore di $f(P)$ in A, e con ciò il teorema è dimostrato, poichè B è tutto di punti interni ad A. Ed invero, se P è in B è certo sempre $f(P) \geqq m$, se P non è in B, per esso si verificherà o la (4) o la (5), e pertanto risulta $f(P) > f(Q)$, ma Q appartiene a B e quindi $f(Q) \geqq m$, donde anche $f(P) > m$.

2. Voglio ora indicare talune notevoli applicazioni di cui è suscettibile il teorema stabilito. In base ad esso si può subito dimostrare il seguente:

II. *Se il polinomio* $\mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_r)$*, nelle* r *variabili* $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_r$*, è di grado pari* 2n *e la forma* $\mathrm{f}_{2n}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots \mathrm{x}_r)$*, composta dei termini di* f *di grado* 2n*, è definita positiva, il polinomio* f *è dotato di minimo assoluto nello spazio intiero.*

Detta $f_h(x_1, x_2, \dots, x_r)$ la forma, di grado h, composta dei termini di f di grado h $(h = 0, 1, 2, \dots, 2n)$, indichiamo con m_h il minimo e con M_h il massimo di $|f_h|$ sull'ipersfera di centro nell'origine O delle coordinate e di raggio *uno*. Poichè f_{2n} e, per ipotesi, definita positiva, risulterà $m_{2n} > 0$. Si ha, nel punto $P(x_1, x_2, \dots, x_r)$,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_r) = f_{2n}(x_1, x_2, \dots, x_r) + \sum_{h=0}^{2n-1} f_h(x_1, x_2, \dots, x_r) =$$

$$= (\overline{OP})^{2n}\left[f_{2n}\left(\frac{x_1}{\overline{OP}}, \frac{x_2}{\overline{OP}}, \dots, \frac{x_r}{\overline{OP}}\right) + \sum_{h=0}^{2n-1} \frac{1}{(\overline{OP})^{2n-h}} f_h\left(\frac{x_1}{\overline{OP}}, \frac{x_2}{\overline{OP}}, \dots, \frac{x_r}{\overline{OP}}\right)\right] \geqq$$

$$\geqq (\overline{OP})^{2n}\left[m_{2n} - \sum_{h=0}^{2n-1} \frac{M_h}{(\overline{OP})^{2n-h}}\right],$$

e quindi

$$\lim_{\overline{OP}\to\infty} f(P) = +\infty;$$

e viene pertanto soddisfatta la (3).

Allo stesso modo si dimostra il teorema più generale seguente:

III. *Se la funzione* $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ *é definita nello spazio intiero, e riesce:*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_r) = \sum_{h=1}^{n} f_h(x_1, x_2, \ldots, x_r),$$

ove $f_h(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ *è una funzione continua e omogenea di grado* α_h *e se, essendo* $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{n-1} < \alpha_n$, *la funzione* $f_n(x_1, x_2, \ldots x_r)$ *è definita positiva (è definita negativa) la* f *è dotata di minimo assoluto (di massimo assoluto) nello spazio intiero.*

3. Un importante teorema del quale, per quanto esso sia di fondamento nella teoria delle approssimazioni lineari, non ho mai visto una più semplice dimostrazione che valga in generale, è il seguente:

IV. *Nell'insieme misurabile* T *di punti di uno spazio* $\Sigma_{(n)}$ *siano definite le funzioni (reali o no)* $\varphi(Q)$, $\varphi_1(Q)$, $\varphi_2(Q), \ldots, \varphi_r(Q)$; *supposto* T *di misura finita, se le* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ *riescono in* T *linearmente indipendenti, l'integrale:*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_r) = \int_T \theta(Q) \, | \varphi(Q) - x_1\varphi_1(Q) - x_2\varphi_2(Q) - \ldots - x_r\varphi_r(Q) |^{\mu} d\,T(Q),$$

μ *designando un qualsiasi fissato numero reale e positivo e* $\theta(Q)$ *una funzione, pur essa definita in* **T**, *ivi sommabile e quasi ovunque positiva, è dotato di minimo assoluto nello spazio intiero* $S_{(r)}$ *del punto* $P(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ (1).

Il teorema I del n. 1 consente un'immediata dimostrazione dell'attuale. Data la continuità in $S_{(r)}$ della $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, basta dimostrare che, detta O l'origine delle coordinate di $S_{(r)}$, si ha

$$\lim_{\overline{OP}\to\infty} f(P) = +\infty. \tag{4}$$

(1) Alla cortesia del prof. TONELLI devo l'indicazione di una Memoria di D. JACKSON [« Transactions of the American Math. Society », vol. 26 (1924), pp. 133-154] le prime pagine della quale sono dedicate ad una particolare dimostrazione, certo meno semplice, dello stesso teorema.

Designando con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ le coordinate di un punto della ipersfera di $S_{(r)}$, di raggio *uno* e di centro nell'origine O delle coordinate, si ha:

$$f(P) = (\overline{OP})^\mu \int_T \theta(Q) \left| \frac{\varphi(Q)}{\overline{OP}} - \alpha_1\varphi_1(Q) - \alpha_2\varphi_2(Q) - \ldots - \alpha_r\varphi_r(Q) \right|^\mu dT(Q).$$

Posto $\lambda = 1 / \overline{OP}$, consideriamo la funzione

$$F(\lambda, \alpha_1, \ldots, \alpha_r) = \int_T \theta(Q) \,|\, \lambda\varphi(Q) - \alpha_1\varphi_1(Q) - \alpha_2\varphi_2(Q) - \ldots - \alpha_r\varphi_r(Q) \,|^\mu dT(Q),$$

nell'insieme chiuso e limitato dello spazio $S_{(r+1)}$, determinato dalle condizioni:

$$0 \leq \lambda \leq 1, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_r^2 = 1.$$

La funzione F riesce continua in quell'insieme, laddove, per la supposta indipendenza lineare delle $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ in T, designando m un certo numero positivo, si ha:

$$F(0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) =$$
$$= \int_T \theta(Q) \,|\, \alpha_1\varphi_1(Q) + \alpha_2\varphi_2(Q) + \ldots + \alpha_r\varphi_r(Q) \,|^\mu dT(Q) \geq m > 0.$$

Si potrà pertanto determinare un numero positivo $\lambda_0 \leq 1$ tale che, *indipendentemente* dal punto $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, si abbia

$$F(\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) > \frac{m}{2}, \quad \text{per} \quad \lambda < \lambda_0,$$

ne segue

$$f(P) > \frac{m}{2} (\overline{OP})^\mu, \quad \text{per} \quad \overline{OP} > \frac{1}{\lambda_0},$$

e quindi la (4).

Anche se le $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ non sono in T linearmente indipendenti l'integrale f è dotato di minimo assoluto in $S^{(r)}$, soltanto, allora, si può affermare che il minimo è conseguito in infiniti punti. Supposto, invero che, quasi ovunque in T, riesca

$$\varphi_h(Q) = \sum_{s=1}^{p} a_{hs}\psi_s(Q) \qquad (h = 1, 2, \ldots, r),$$

con $p < r$, essendo le $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p$ linearmente indipendenti in T, si ha:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_r) = g(y_1, y_2, \dots, y_p) = \int_T \theta(Q) \left| \varphi(Q) - \sum_{s=1}^{p} y_s \psi_s(Q) \right|^\mu dT(Q),$$

avendo posto

$$y_s = \sum_{h=1}^{r} a_{hs} x_h .$$

Se $(y^0_1, y^0_2, \dots, y^0_p)$ rende minimo g in $S_{(p)}$, il minimo di f in $S_{(r)}$ si ha per gli infiniti sistemi di valori delle $x_1, x_2, \dots, x_r$ verificanti le $p\,(< r)$ equazioni lineari:

$$\sum_{h=1}^{r} a_{hs} x_h = y^0_s .$$

4. È ben noto che se $f(P)$ è funzione reale delle r variabili $x_1, x_2, \dots, x_r$, continua nel dominio limitato A di $S_{(r)}$, *armonica* nell'interno di A, il minimo e il massimo assoluti di $f(P)$ in A sono conseguiti in punti della frontiera di A; ebbene, il teor. I consente di potere affermare, assai più generalmente, quanto segue:

V. *Se* A *è il più arbitrario insieme aperto (limitato o no) internamente connesso dello spazio* $S_{(r)}$ *e la funzione reale* f(P) *è armonica in* A, *sussiste la limitazione:*

$$l' = \lim_{\substack{\overline{P(FA)} \to 0 \\ \overline{PO} \to \infty}}{}' f(P) \leq f(P) \leq \lim_{\substack{\overline{P(FA)} \to 0 \\ \overline{PO} \to \infty}}{}'' f(P) = l'', \tag{5}$$

comunque si fissi il punto O *nello spazio.*

Ed invero, se per un certo punto Q di A non riuscisse verificata la (5), e se, per esempio, risultasse $l' > f(Q)$, in forza del teorema I, la $f(P)$ conseguirebbe il suo minimo assoluto in A in un punto (interno) di A. La funzione armonica $f(P)$ sarebbe dunque dotata, in un punto dell'insieme aperto A internamente connesso, di un minimo, essa sarebbe perciò costante in A e quindi $l' = f(Q)$.

Il teorema V ora stabilito si presta a notevoli applicazioni nello studio delle singolarità (anche non isolate) che una funzione armonica può presentare alla frontiera dell'insieme aperto costituito dai suoi punti di regolarità. Ma di ciò dovrò trattare altrove.

Napoli, 5 marzo 1927.