Bollettino Unione Matematica Italiana

Guido Fubini

Invarianti proiettivi, metrici, affini di una superficie

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (1927), n.3, p. 113–120.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_3_113_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1927.

PICCOLE NOTE

Invarianti proiettivi, metrici, affini di una superficie.

Nota di GUIDO FUBINI (a Torino).

§ **1.** Si presentano talvolta problemi di geometria differenziale relativi nello stesso tempo a proprietà metriche ed a proprietà proiettive di una superficie S. In tal caso si possono esprimere gli elementi proiettivi della superficie S mediante gli elementi metrici; ma questo metodo porta talvolta a complicazioni, che si evitano se si parte invece da una definizione proiettiva della superficie. Voglio qui porre in luce il substrato analitico di questo secondo modo di procedere, facendo vedere come si possa, dagli elementi di carattere proiettivo, risalire a quelli di tipo metrico od affine. Tratterò poi, come esempio, un problema particolare. Per la geometria metrica userò senz'altro le notazioni delle classiche *Lezioni di Geometria Differenziale* del prof. BIANCHI; per la *Geometria proiettivo-differenziale* quelle del trattato pubblicato da me e dal prof. CECH (Bologna, Zanichelli). La superficie S è riferita alle asintotiche u, v [1]. Dagli elementi metrici si passa agli elementi fondamentali nella geometria *affine* ponendo:

$$\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}=\theta_u,\quad \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}=\theta_v,\quad \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}=\beta,\quad \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=\gamma, \tag{1}$$

ove con θ_u indico $\dfrac{\partial\theta}{\partial u}$ ecc. Posto

$$K=-\frac{1}{\sigma^4}=\text{curvatura totale di GAUSS}\quad \left(\sigma=\sqrt[4]{-\frac{1}{K}}\right). \tag{2}$$

Si potrebbe definire non solo $d\theta$, mediante (1), ma anche la stessa θ, ponendo:

$$e^\theta=\sqrt{D'\sqrt{EG-F^2}}=\sqrt{EG-F^2}:\sigma \quad \text{ossia} \quad \sigma e^\theta=\sqrt{EG-F^2}. \tag{3}$$

(1) Con ciò si escludono le sviluppabili.

L'aggiunta di una costante alla θ muta una superficie in una simile.

Gli elementi proiettivi sono [oltre alle β, γ date da (1)] le:

$$L = \theta_{uu} - \frac{1}{2}\theta_u^2 - \beta\theta_v - \beta_v, \quad M = \theta_{vv} - \frac{1}{2}\theta_v^2 - \gamma\theta_u - \gamma_u. \tag{4}$$

Essi sono legati dalle sole condizioni d'integrabilità:

$$\begin{cases} L_v = -(2\beta\gamma_u + \gamma\beta_u), \quad M_u = -(2\gamma\beta_v + \beta\gamma_v) \\ \beta M_v + 2M\beta_v + \beta_{vvv} = \gamma L_u + 2L\gamma_u + \gamma_{uuu}. \end{cases} \tag{5}$$

Note β, γ, L, M, la superficie S è determinata a meno di una collineazione.

Allora le (4) si possono considerare come equazioni nella θ, certo integrabili in virtù di (5). Introduciamo una nuova incognita, ponendo

$$s = \log \sigma.$$

Sarà, per le equazioni di CODAZZI:

$$s_u = \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}, \quad s_v = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}. \tag{6}$$

Se fossero note la θ (determinata dalle (4)) e la s, noi conosceremmo tutti i simboli di CHRISTOFFEL (1) e (6) per l'elemento lineare di GAUSS; e quindi, come è noto dalla teoria delle forme quadratiche differenziali del 1° ordine, anche i suoi coefficienti E, F, G. Troveremmo che questi sono dati dalle:

$$\begin{cases} \sigma_{uu} + \beta\sigma_v - \theta_u\sigma_u - (\beta_v + \beta\theta_v)\sigma = E\sigma^{-3} \\ \sigma_{uv} - (\theta_{uv} + \beta\gamma)\sigma = -F\sigma^{-3} \\ \sigma_{vv} + \gamma\sigma_u - \theta_v\sigma_v - (\gamma_u + \gamma_u)\sigma = G\sigma^{-3}. \end{cases} \tag{7}$$

Proveremo ben presto queste equazioni (7) anche in altro modo. Così pure, mediante le (1) e (6), siamo in grado di esprimere le derivate di E, F, G mediante funzioni lineari delle E, F, G. Troviamo così:

$$\begin{cases} E_u = 2(\theta_u E + \beta F) & E_v = 2(Es_v + Fs_u) \\ F_u = Es_v + Fs_u + \theta_u F + \beta G & F_v = Gs_u + Fs_v + \theta_v F + \gamma E \\ G_u = 2(Gs_u + Fs_v) & G_v = 2(\theta_v G + \gamma F). \end{cases} \tag{8}$$

Le (4), (7), (8) *formano un sistema di equazioni nelle* $s = \log \sigma$, θ, E, F, G *che si riconoscono illimitatamente integrabili, e determinano gli elementi metrici euclidei, quando siano dati i proiettivi.*

La relazione (3) è identicamente soddisfatta (com'e facile verificare osservando che le relazioni ottenute derivando sono conseguenza delle precedenti), se è soddisfatta nel punto iniziale; restano dunque arbitrarii i valori iniziali di $s, \sigma_u, \sigma_v, \theta, \theta_u, \theta_v, \theta_{uv}$, E, F, G legati da (3), cioè restano arbitrarie *nove* costanti: come ci si poteva aspettare perchè le proiettività sono ∞^{15}, i movimenti ∞^6, e $15 - 6 = 9$.

Le (7) si possono provare anche in altro modo: alle coordinate cartesiane ortogonali corrispondono, nella legge di normazione della geometria proiettiva, le coordinate di LELIEUVRE: le prime tre di esse sono $\xi = \sigma X$, $\eta = \sigma Y$, $\zeta = \sigma Z$, se X, Y, Z sono i coseni direttori della normale.

Per i teoremi generali della geometria proiettiva queste soddisfano alle:

$$(9) \qquad \begin{cases} \xi_{uu} - [\theta_u \xi_u - \beta \xi_v + (\beta_v + \beta\theta_v)\xi] = 0 \\ \xi_{uv} - (\theta_{uv} + \beta\gamma)\xi = 0 \\ \xi_{vv} - [\theta_v \xi_v - \gamma \xi_u + (\gamma_u + \gamma\theta_u)\xi] = 0 \end{cases} \qquad \text{(e analoghe in } \eta, Z)$$

la seconda delle quali dipende da ciò che le coordinate cartesiane sono coordinate non omogenee (loc. cit. pag. 109).

D' altra parte, per la teoria dell' immagine sferica di GAUSS, le X, Y, Z soddisfano alle:

$$(10) \qquad \begin{cases} X_{uu} - [(\theta_u - 2s_u)X_u - \beta X_v - E\sigma^{-4}X] = 0 \\ X_{uv} - [-s_v X_u - s_u X_v + F\sigma^{-4}X] = 0 \\ X_{vv} - [-\gamma X_u + (\theta_v - 2s_v)X_v - G\sigma^{-4}X] = 0. \end{cases}$$

Basta scrivere che, posto $\xi = \sigma X$, le (9) e (10) si riducono le une alle altre per ottenere le (7).

§ **2.** Studii analoghi si possono compiere in geometria non euclidea: noi supponiamo uguale ad 1 la curvatura dello spazio ambiente. Al posto di (2) si dovrà porre

$$(2_{\text{bis}}) \qquad K - 1 = -\frac{1}{\sigma^4} \qquad (s = \log \sigma)$$

Le (6), (3), (8) rimangono immutate; ma le (7) diventano:

$$(7_{\text{bis}}) \qquad \begin{cases} \sigma_{uu} - [\theta_u \sigma_u - \beta\sigma_v + (-E + \beta_v + \beta\theta_v)\sigma] = E\sigma^{-3} \\ \sigma_{uv} - [F + \theta_{uv} + \beta\gamma] = -F\sigma^{-3} \\ \sigma_{vv} - [\theta_v \sigma_v - \gamma\sigma_u + (-G + \gamma_u + \gamma\theta_u)\sigma = G\sigma^{-3}. \end{cases}$$

Le (5) rimangono immutate, ma alle (4) si debbono sostituire le

$$(4_{\text{bis}})\qquad \begin{cases} L = \theta_{uu} - \dfrac{1}{2}\theta_u^2 - \beta\theta_v - \beta_v + 2E, \\ M = \theta_{vv} - \dfrac{1}{2}\theta_v^2 - \gamma\theta_u - \gamma_u + 2G. \end{cases}$$

E si può procedere come sopra. Non si può però estendere l'ultima parte del § 1 relativa alle coordinate di LELIEUVRE. Infatti, se x, X sono le coordinate di WEIERSTRASS di punto e di piano tangente, alle x, nella legge di normazione della geometria proiettiva, corrispondono le $\xi = \sigma X$, che pertanto soddisfano alle:

$$(9_{\text{bis}})\qquad \begin{cases} \xi_{uu} = \theta_u\xi_u - \beta\xi_v + (-E + \beta_v + \beta\theta)\xi \\ \xi_{vv} = -\gamma\xi_u + \theta_v\xi_v + (-G + \gamma_u + \gamma\theta_u). \end{cases}$$

Poichè le X soddisfano alla prima e terza delle (10), potremo come al § 1, dedurne la prima e terza delle (7_{bis}). Non possiamo però ricavare la seconda, perchè ci manca l'analoga della seconda delle (9): la quale non si può generalizzare al caso attuale perchè le cordinate x di WEIERSTRASS di punto sono ancora coordinate omogenee.

§ 3. Applicheremo i precedenti risultati alla ricerca delle superficie, per cui la *normale metrica coincide con la direttrice di Wilczynski* [1]. Queste rette congiungono il punto x l'una al punto $x_{uv} - s_v x_u - s_u x_v$, l'altra al punto $x_{uv} - \dfrac{1}{2}\left(\theta_u + \dfrac{\gamma_u}{\gamma}\right)x_v - \dfrac{1}{2}\left(\theta_v + \dfrac{\beta_v}{\beta}\right)x_u$. Le due rette coincidono soltanto se

$$2s_v = \theta_v + \frac{\gamma_v}{\gamma} \qquad 2s_u = \theta_u + \frac{\beta_u}{\beta}.$$

Se ne trae $\dfrac{\partial^2}{\partial u \partial v}\log\dfrac{\beta}{\gamma} = 0$. Cambiando parametri delle u, v potremo rendere $\beta = \gamma$: cioè *la superficie è isotermo-asintotica*. E le precedenti diventano

$$(11)\qquad 2s_v = \theta_v + (\log\beta)_v, \qquad 2s_u = \theta_u + (\log\beta)_u.$$

Sostituendo nella prima e terza della (7) e (7_{bis}) questi valori di $s_u = \sigma_u : \sigma$ e $s_v = \sigma_v : \sigma$, tenendo conto di (4) e (4_{bis}), e indicando

[1] La *direttrice* è definita solo per superficie *non rigate*.

con σe, σf, σg i secondi membri di (7) o (7bis) troviamo:

$$(12)\qquad 2e\beta^2 = \beta\beta_{uu} - \frac{1}{2}\beta_u^2 + \beta^2 L, \qquad 2g\beta^2 = \beta\beta_{vv} - \frac{1}{2}\beta_v^2 + \beta^2 M.$$

Per le (5) se ne trae:

$$(13)\qquad 2\beta e_v = (\beta B)_u \qquad 2\beta g_u = [\beta B]_v$$

ov' è posto

$$(14)\qquad B = \frac{\partial^2 \log \beta}{\partial u \partial v} - \beta^2.$$

Per calcolare σf non serve la seconda delle (7) o (7bis), perchè θ_{uv} non ci è noto.

Questa difficoltà si supera osservando che le (8) equivalgono alle equazioni che se ne deducono sostituendo alle E, F, G, θ, β, γ le e, f, g, $\theta - 2s$, $-\beta$, $-\gamma$: equazioni che, pur senza scriverle, chiameremo equazioni (VIII). Si osserva allora che, in virtù di (11) le (VIII) danno:

$$(15)\qquad (\beta^2 e)_u = (g\beta^2)_v = -2\beta^3 f,$$

ossia:

$$(16)\qquad -4\beta^2 f = \beta_{uuu} + 2\beta_u L + \beta L_u = \beta_{vvv} + 2\beta_v M + \beta M_v.$$

La identità del 2° e 3° membro segue anche dalle (5). Si tratta di eliminare la s tra tutte queste equazioni; si riesce a far questo (ciò che a prima vista sembra difficile) in modo inaspettatamente semplice osservando che dalle (VIII) e (11) segue:

$$(17)\qquad -4\beta^2 g + 2\beta e_v - 4(\beta f)_u = 0 \quad -4\beta^2 g + 2\beta g_u - 4(\beta f)_v = 0.$$

Per le (13), (15), (16), in cui si consideri il terzo membro, la prima di queste diventa:

$$\left(\beta B + 2\frac{\beta_v}{\beta} M + \frac{\beta_{vvv}}{\beta} + M_v\right)_u = 2\left(\beta\beta_{vv} - \frac{1}{2}\beta_v^2 + \beta^2 M\right).$$

Ricordando il valore di M_u tratto da (5), questa diventa una equazione lineare in M, che si riconosce con qualche artificio potersi scrivere nella forma:

$$(18)\qquad 2BM + (\beta B)_u + B_{vv} + 3\frac{\beta_v}{\beta} B_v + 3\frac{\beta_{vv}}{\beta} B = 0.$$

E analogamente si trova:

$$(19)\qquad 2BL + (\beta B)_v + B_{uu} + 3\frac{\beta_u}{\beta} B_u + 3\frac{\beta_{uu}}{\beta} B = 0.$$

L'aver scritto la precedente equazione nella forma (18) è di fondamentale importanza: essa dimostra che *tale equazione in* M *non è mai irresolubile;* perchè, *se il coefficiente* B *della* M *è nullo,* la (18) *è identicamente soddisfatta.* Dobbiamo distinguere dunque due casi:

1°) La B è nulla, cioè le asintotiche della superficie S appartengono a complessi lineari. Dato β (che si trova integrando l'equazione di LIOUVILLE $B=0$) le L, M (cfr. il mio trattato già cit., pag. 115) sono determinate a meno di costanti arbitrarie: le superficie corrispondenti, tutte tra loro proiettivamente applicabili, sono (*loc. cit.*, pag. 272) o superficie a curvatura nulla negli spazii a curvatura costante, per cui è ben nota la coincidenza della normale metrica con la direttrice, oppure ne sono un caso limite, che nel problema attuale è privo di ogni interesse. Infatti in tal caso (*loc. cit.*):

$$\beta=\frac{\sqrt{U'V'}}{U+V};\quad L=-\frac{\partial^2\log\beta}{\partial u^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\log\beta}{\partial u}\right)^2+U_1;$$

$$M=-\frac{\partial^2\log\beta}{\partial v^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\log\beta}{\partial v}\right)^2+V_1$$

$$U_1=\frac{kU^2-rU+2q}{U'}\qquad V_1=\frac{kU^2+rU+2q}{V'}$$

ove U è funzione di u, V di v, k, r, q sono costanti legate dalla $qk=2r^2$. Se $k=0$ anche $r=0$; se $k\neq 0$, mutando U, V in $U-\text{cost.}$, $V-\text{cost.}$, possiamo rendere $r=q=0$, e poi, mutando U, V in $\frac{1}{U}$, $\frac{1}{V}$, rendere $k=r=0$. In ogni caso pertanto si può supporre $k=r=0$.

Si trova allora dalle (12), (15)

$$e=\frac{q}{U'},\ g=\frac{q}{V'},\ f=\frac{q}{\sqrt{U'V'}},\quad \text{cosicchè}\quad eg-f^2=0,$$

caso assurdo, perchè le sviluppabili (ed anzi le rigate) sono escluse da questo studio.

2°) Se $B\neq 0$, le (18), (19) determinano L, M, appena sia data β. Sostituendo in (5) troviamo, per la determinazione di β, un sistema di 3 equazioni alle derivate parziali nell'incognita β (nota la quale, essendo $\gamma=\beta$ ed L, M essendo date dalle (18) e (19), la nostra superficie è completamente determinata a meno di una determinazione). Lo studio di questo sistema non presenta difficoltà: non ce ne occupiamo, sia per la sua lunghezza, sia perchè le eventuali superficie corrispondenti sono assai meno interessanti di quelle del 1° caso: le quali si possono caratterizzare dicendo che la coincidenza della normale metrica con la direttrice si conserva anche attraverso deformazioni proiettive: è ben curioso che ciò abbia per conseguenza che le asintotiche appartengono a complessi lineari, e che la loro curvatura metrica totale è nulla!

§ 4. Potremmo chiederci quando coincidono la normale metrica e la proiettiva. Se ξ sono coordinate di WEIERSTRASS di piano tangente se la metrica è non euclidea, o se le prime tre di esse coincidono coi coseni direttori della normale, se la metrica è euclidea, ad esse corrispondono, nella legge di normazione della geometria proiettiva, le coordinate di punto $\bar{x} = x : \sigma$; la normale metrica (che congiunge il punto x al punto $\bar{x}_{uv}$) coincide con la normale proiettiva, se le $\bar{x}$ sono coordinate normali di punti, cioè se le ξ precedentemente citate sono coordinate normali di piano tangente. Basta questo per scrivere immediatamente l'equazione alle derivate parziali, da cui dipende la ricerca delle nostre superficie.

§ 5. Infine potremmo, invece della direttrice, o della normale proiettiva, considerare una retta canonica qualsiasi. Di ciò ci vogliamo ora occupare, anche senza condurre a termine la ricerca, ma accontentandoci di ridurla a un calcolo lungo, ma senza più alcuna difficoltà; ne risulterà ben chiaro che gli unici casi interessanti sono i precedenti. Si trova che per un valore *numerico* di λ deve essere:

$$-s_v = \left(2\lambda + \frac{1}{2}\right)(\log\beta)_v + \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)(\log\gamma)_v - \frac{1}{2}\theta_v$$

$$-s_u = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)(\log\beta)_u + \left(2\lambda + \frac{1}{2}\right)(\log\gamma)_u - \frac{1}{2}\theta_u$$

da cui si deduce che, escluso il caso $\lambda = 0$ (quello della normale proiettiva già esaurito al § 4) è $\left(\log\frac{\beta}{\gamma}\right)_{uv} = 0$, cosicchè, come al § 3, si può supporre $\beta = \gamma$; e, posto $\mu = -(6\lambda + 2)$, le precedenti diventano:

$$2s = \theta + \mu \log\beta + \text{cost.}$$

È $\mu = 1$ nel caso (trattato al § 3) della direttrice.

Come al § 3 si deduce:

$$(12_{\text{bis}}) \quad \begin{cases} 2e\, L + (\mu - 1)\beta_v + \mu(\log \beta_{uu}) + \dfrac{\mu^2}{2}\dfrac{\beta_u^2}{\beta^2} \\ 2g = M + (\mu - 1)\beta_u + \mu(\log \beta)_{vv} + \dfrac{\mu^2}{2}\dfrac{\beta_v^2}{\beta^2} \end{cases}$$

$$(15_{\text{bis}}) \qquad (2\beta^{2\mu} e)_u = (2\beta^{2\mu} g)_v = -4\beta^{2\mu+1} f$$

$$(17_{\text{bis}}) \quad -4\beta^{\mu+1} g + 2\beta^\mu e_v - 4(\beta^\mu f)_u = -4\beta^{\mu+1} e + 2\beta^\mu g_u - 4(\beta^\mu f)_v = 0.$$

Il confronto dei primi due membri di (15_{bis}) dà un'equazione, che, se $\mu \neq 1$, non coincide con la terza delle condizioni d'integrabilità (5). Il caso $\mu = 1$ essendo già studiato al § 3, noi, supposto $\mu \neq 1$, possiamo, confrontando l'equazione testè ottenuta con la teoria di (5), dedurne i valori di $L_u - M_v$ e di $L\beta_u - M\beta_v$ espressi per mezzo di β e sue derivate. Altrettanto avverrà (se $\beta_u \neq 0$ [1]) per $L - M\dfrac{\beta_v}{\beta_u}$; ora essendo noto il valore di $L_u - M_v$ ed essendo dati L_v ed M_u da (5), derivando rispetto u o rispetto v, ne deduciamo i valori di $M_v - M\left(\dfrac{\beta_v}{\beta_u}\right)_u$ e di $M_v - M\left(\log \dfrac{\beta_v}{\beta_u}\right)$. Derivando rispetto u e ricordando il valore di M_u dato da (5) ne deduciamo i valori di $M\left(\log \dfrac{\beta_v}{\beta_u}\right)_{uv}$ e di $M\left(\dfrac{\beta_v}{\beta_u}\right)_{uu}$; e similmente si calcolano $L\left(\log \dfrac{\beta_u}{\beta_v}\right)_{uv}$ ed $L\left(\dfrac{\beta_u}{\beta_v}\right)_{vv}$.

Così la prima delle (17_{bis}) permette di calcolare, per mezzo di β e sue derivate la

$$M_v + AM \text{ ove } A = 2\mu(\mu - 2)\frac{\beta_v}{\beta} + 2\mu\frac{\beta_{uv}}{\beta_u} - 2\frac{\beta^3}{\beta_u},$$

donde, derivando rispetto u si trae il valore di $A_u M$. Un risultato analogo si trova per L. Di più, essendo note $L\beta_u - M\beta_v$, entrambe le L, M saranno note, appena sia calcolata una di esse. Dunque, esclusi casi particolarissimi il cui studio si compie immediatamente, potremo calcolare i valori di L, M per mezzo della β e derivate. Esprimendo che tali valori delle L, M soddisfano alle condizioni volute, si trova un sistema di equazioni nella sola β. Come si vede, si tratta di uno studio analogo al secondo caso del § 3 [2]. E, in conclusione, riconosciamo che vi sono due soli casi veramente notevoli: *quello del* § 4 *e quello delle superficie a curvatura nulla in uno spazio di curvatura costante.*

[1] Lo studio dei casi $\beta_u = 0$ o $\beta_v = 0$ si compie senza difficoltà. Perciò supporremo $\beta_u\beta_v \neq 0$.

[2] Non è escluso che tali equazioni siano incompatibili; ciò si può vedere soltanto da chi espliciti le condizioni d'integrabilità.