
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LETTERIO TOSCANO

L'equilibrio relativo nel problema generale di n masse puntiformi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 6 (1927), n.2, p. 93–95.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_2_93_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_2_93_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1927.

L'equilibrio relativo nel problema generale di n masse puntiformi.

Nota di LETTERIO TOSCANO (a Messina).

Sia dato un sistema libero di masse puntiformi (aventi valori invariabili) soggetto soltanto a forze di grandezze funzioni delle sole mutue distanze e di orientazioni individuate dalle congiungenti. Si consideri di esso sistema un moto intorno al baricentro; se questo moto viene supposto rigido, esso è necessariamente di rotazione uniforme ⁽¹⁾.

(¹) Nel caso in cui le predette azioni mutue siano di tipo newtoniano, si ha l'ordinario problema dell'equilibrio relativo di n corpi — cfr., ad esempio, H. ANDOYER, *Sur l'équilibre relatif de n corps*; Bulletin astronomique 1906, pag. 50 — ove trovasi anche una dimostrazione cartesiana del teorema generale contenuto nel testo, teorema che qui viene invece dimostrato mediante diretto procedimento vettoriale (senza ricorrere alla teoria delle omografie). Sempre nel caso (ordinario) di n corpi non com

Mediante un recente procedimento ⁽¹⁾, denotate con v ed a la velocità e l'accelerazione di un generico punto P del sistema nel supposto movimento intorno al baricentro G e tenendo conto che a e $P - G$ sono vettori costanti rispetto ad una terna solidale col sistema durante il predetto moto intorno a G , risulta che la grandezza di v è costante, quindi l'accelerazione a tutta centripeta.

Consideriamo ora tre casi: secondo che i punti P sono allineati, o stanno in un piano senza essere allineati, o stanno in posizione generica.

Nel primo caso, le accelerazioni essendo concorrenti in G , il considerato moto intorno al baricentro è centrale (quindi piano); inoltre, essendo costanti le distanze dei punti P da G , è rotatorio; e infine uniforme avendo le velocità grandezze costanti.

Nel secondo caso l'accelerazione è contenuta nel piano dei punti P e vale il procedimento stabilito dal prof. CRUDELI nella citata sua Nota.

Veniamo infine al caso generico. Intanto, dalla formula fondamentale della Cinematica dei moti rigidi, si ha per noi

$$v = w \wedge (P - G),$$

denotando con w la velocità angolare; inoltre (per essere, come

planari la signorina E. BREGLIA (cfr. *Giornale di Matem.* 1916, pagg. 151-173) servendosi delle omografie vettoriali ebbe a dimostrare i risultati del PIZZETTI sul movimento che mantiene inalterati i rapporti delle mutue distanze (cfr. anche R. MARCOLONGO, *Il problema dei tre corpi*; Milano, Hoepli, 1919, pag. 151).

Nel caso delle azioni mutue attrattive e di tipo newtoniano la esistenza di sistemi di masse puntiformi in moto rotatorio uniforme fu posta in luce da diversi autori (classiche le soluzioni triangolari del LAGRANGE, che risultano, com'è ben noto, equatoriali). Il caso poi di azioni mutue alcune attrattive ed altre repulsive (caso oggi di speciale importanza per i modelli molecolari, atomici e nucleari) ha ricevuto una trattazione sistematica dal prof. U. CRUDELI, il quale, fra altro, ha posto in luce la esistenza di sistemi triangolari uniformemente rotanti di RUTHERFORD-BOHR. A differenza di quanto avviene nel caso di LAGRANGE (superiormente richiamato) cotesti sistemi triangolari non sono equatoriali; il loro piano contiene invece l'asse di rotazione.

⁽¹⁾ Cfr. U. CRUDELI, *Sui modelli dell'atomo d'elio*. (Rend. R. Acc. Naz. Lincei, 1° semestre 1926, pag. 671).

fu detto, l'accelerazione α tutta centripeta)

$$\mathbf{v} \times \alpha = 0;$$

ne segue che i tre vettori $\mathbf{w}$, $P - G$, α sono complanari, notando come si possa omettere la trattazione del caso in cui l'accelerazione α (di grandezza indipendente dal tempo) fosse nulla per qualche punto P (diciamolo P_0) dal momento che allora si avrebbe subito il moto rotatorio (uniforme) intorno alla retta unente P_0 con G . Considerando in ogni istante la configurazione dei piani ($P - G$, α), nell'ipotesi che essi effettivamente esistano, contenenti $\mathbf{w}$ (vettore da riguardarsi qui applicato in G come α in P), poichè α e $P - G$ sono costanti rispetto alla terna solidale, sarà pure costante rispetto alla terna medesima la predetta configurazione e perciò anche la orientazione di $\mathbf{w}$, orientazione che sarà allora, come è ben noto, assolutamente costante. Ma $\mathbf{v}$ ha grandezza costante, dunque $\mathbf{w}$ risulta addirittura costante.

Se poi i piani ($P - G$, α), tutti o parzialmente, non esistessero, dovrebbe aversi per ogni punto P o per alcuni che l'accelerazione è diretta su G . Nella prima ipotesi si hanno dei moti piani circolari uniformi, di cui i piani delle traiettorie *passano per* G ; ma, poichè $\mathbf{w}$ risulta allora perpendicolare a questi piani, i piani medesimi coincidono e il moto del sistema intorno al baricentro è rotatorio uniforme. Nella seconda ipotesi si vede ormai subito che si ottiene pure il moto rotatorio uniforme.

Messina, gennaio 1927.