Bollettino Unione Matematica Italiana

Letterio Laboccetta

Equazioni che rappresentano domini rettangolari e circolari di un $S(n)$

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (1927), n.2, p. 91–93.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_2_91_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1927.

Equazioni che rappresentano dominii rettangolari e circolari di un $S(n)$.

Nota di LETTERIO LABOCCETTA (a Roma).

Ricorre continuamente nell'analisi la considerazione di dominii, od intorni, circolari, rettangolari ed anche quadrati i quali ultimi, in particolare, sono spesso disposti con le loro diagonali parallele agli assi coordinati.

Riferendosi, dapprima, al piano e supponendo date le coordinate (p, q) del centro, le lunghezze $2a$, $2b$ dei lati (paralleli agli assi) del rettangolo, la lunghezza $2d$ delle diagonali (parallele agli assi) del quadrato, e il raggio r del circolo, i punti appartenenti a questi dominii vengono, come è noto, definiti assoggettando le loro coordinate a soddisfare, rispettivamente, le limitazioni

$$(1) \qquad 0 \leq |x - p| \leq a, \quad 0 \leq |y - q| \leq b$$

$$(2) \qquad 0 \leq |x - p| + |y - q| \leq d$$

$$(3) \qquad 0 \leq (x - p)^2 + (y - q)^2 \leq r^2.$$

Sorge spontanea la domanda se non sia possibile, senza bisogno di fare uso delle limitazioni, rappresentare questi dominii con delle equazioni, allo stesso modo come con una equazione si rappresenta una linea del piano od una superficie dello spazio.

Una tale possibilità è offerta, ed in modo facile, dall'uso, ad esempio, della funzione « intero di x » servendosi della quale si hanno, per rappresentare i detti tre dominii le equazioni [1]

$$(4) \qquad \mathrm{I}\frac{|x - p|}{a} + \mathrm{I}\frac{|y - q|}{b} = 0$$

$$(5) \qquad \mathrm{I}\frac{|x - p| + |y - q|}{d} = 0$$

$$(6) \qquad \mathrm{I}\frac{1}{r^2}\{(x - p)^2 + (y - q)^2\} = 0.$$

Queste equazioni però escludono, dai corrispondenti insiemi,

[1] Per rappresentare la funzione « intiero di x » sono in uso, come è noto, simboli diversi: $E(x)$, $\varepsilon(x)$, $[x]$, $I_{max}(x)$, $I(x)$; è quest'ultimo simbolo che adotto, scrivendo anzi più semplicemente Ix.

i punti del contorno le cui coordinate ad esse non soddisfano [1]. Volendo che la rappresentazione comprenda i punti del contorno basta completare il primo membro di ciascuna equazione con l'aggiunta di una funzione la quale sul contorno assuma un valore uguale e contrario di quello che su di esso prende il primo membro sopra indicata, e negli altri punti del piano un valore diverso da quello del detto primo mèmbro col segno cambiato.

Di tali funzioni se ne possono costruire diverse. Supponendo che si tratti di dominii dello spazio ordinario a tre dimensioni, e che perciò in luogo del rettangolo si abbia un parallelepipedo rettangolo di spigoli $2a$, $2b$, $2c$, in luogo del quadrato un ottaedro regolare, sempre di diagonale $2d$, ed in luogo del circolo una sfera di raggio r, e supponendo pure, per maggior semplicità, che il centro di questi dominii cada nell'origine, si potrà scrivere, ad esempio, [2]

$$(7)\quad]\frac{|x|}{a} +]\frac{|y|}{b} +]\frac{|z|}{c} -]\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{2}\frac{|x|}{a} -]\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{2}\frac{|y|}{b} -]\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{2}\frac{|z|}{c} = 0$$

$$(8)\quad]\frac{|x| + |y| + |z|}{d} -]\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{2}\frac{|x| + |y| + |z|}{d} = 0$$

$$(9)\quad]\frac{1}{r^2}\{x^2 + y^2 + z^2\} -]\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{2}\frac{1}{r^2}\{x^2 + y^2 + z^2\} = 0.$$

È evidente in qual modo dal caso dello spazio ordinario a tre dimensioni si può passare al caso generale di un $S(n)$.

Giova piuttosto qui osservare che il metodo da seguire nella rappresentazione rimane lo stesso, anche quando invece dei dominii limitati innanzi considerati, si considerano i dominii ad essi complementari che si estendono dalla loro frontiera all'infinito.

(1) Il primo membro della (5), per esempio, assume il valore $+1$ su tutti i punti del contorno e conserva tale valore fino al contorno del quadrato che ha per diagonale $4d$ cosicchè $]\frac{|x-p|+|y-q|}{d} = 1$ è l'equazione della zona poligonale, contorno esterno escluso, compresa fra i due quadrati di semidiagonale d e $2d$, mentre scrivendo $|x-p| + |y-q| = d$ si ha la rappresentazione del perimetro del primo quadrato, cioè l'equazione, nel piano, di una linea poligonale.

(2) Si osservi anche qui che scrivendo $|x| + |y| + |z| = d$ si ha la rappresentazione dei punti di frontiera dell'ottaedro, cioè l'equazione, nello spazio, di una superficie poliedrica e scrivendo $]\frac{|x| + |y| + |z|}{a} = 1$ si ha la rappresentazione dello strato compreso fra i due ottaedri di semi diagonali d e $2d$, la superficie dell'ottaedro esterno esclusa.

Si ha infatti in tal caso, supponendo sempre che il céntro di ogni dominio cada nell'origine e che la frontiera debba essere compresa nella rappresentazione

$$\sum_i^{1,n} I \frac{a_i}{|x_i|} - \sum_i^{1,n} I \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{2} \frac{a_i}{|x_i|} = 0 \tag{10}$$

$$I \left\{ d : \sum_i^{1,n} |x_i| \right\} - I \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{2} \left\{ d : \sum_i^{1,n} |x_i| \right\} = 0 \tag{11}$$

$$I \left\{ r^2 : \sum_i^{1,n} (x_i^2) \right\} - I \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{2} \left\{ r^2 : \sum_i^{1,n} (x_i^2) \right\} = 0. \tag{12}$$

Si comprende pure agevolmente che, seguendo lo stesso metodo anche gl'insiemi di punti costituenti dominii di altra forma possono essere rappresentati mediante equazioni e così ad esempio:

$$I \frac{1}{a^2 b^2} (b^2 x^2 + a^2 y^2) = 0 \tag{13}$$

rappresenta il dominio ellittico, privato del contorno, di semi-assi a e b e col centro nell'origine; in ogni caso l'uso della funzione Ix permettendo di sostituire ad una limitazione una equazione che comprenda solo funzioni di variabili reali.

Roma, 31 gennaio 1927.