
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

M. CHINI

Sulle funzioni omogenee

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **6** (1927), n.2, p. 86–90.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_2_86_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_2_86_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sulle funzioni omogenee.

Nota di MINEO CHINI (a Firenze).

Sulle funzioni omogenee proponiamoci la seguente questione:

Quali funzioni di una o più funzioni omogenee sono ancora omogenee nelle variabili di queste?

Per esempio, il prodotto di due o più funzioni omogenee è ancora una funzione omogenea, mentre la loro somma, se i gradi di omogeneità sono differenti, non lo è più.

Considerando dapprima il caso in cui sia data una sola funzione omogenea $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, osservarsi che, se il grado di omogeneità è zero, qualsivoglia funzione di u sarà pure omogenea di grado zero, perchè u dovrà contenere soltanto i rapporti tra $n-1$ variabili e la rimanente.

Supposto diverso da zero il grado ρ di omogeneità della u , osserviamo allora che la funzione

$$f(u) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

sarà omogenea di grado k quando, per ogni sistema di valori delle variabili

$$x_1, x_2, \dots, x_n, t,$$

si abbia identicamente:

$$\varphi(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^k \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Ma essendo:

$$u(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^\rho u(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

la precedente condizione equivale all'altra:

$$f(t^\rho u) = t^k f(u) = (t^\rho)^{\frac{k}{\rho}} f(u),$$

la quale deve essere soddisfatta per tutti i possibili valori che assume u , e qualunque sia t . Il che significa che la funzione

$$f(u)$$

della variabile u deve essere omogenea (di grado $b = k/\rho$). Quindi

deve aversi:

$$f(u) = au^b,$$

con a costante arbitraria ⁽¹⁾.

Dunque: *L'unico simbolo di funzione che operando sopra una funzione omogenea, di grado differente da zero, la conserva omogenea, è l'elevazione a potenza (oltre la moltiplicazione per un fattore costante).*

Passando ora al caso generale, cioè quello in cui le funzioni assegnate siano m , supporremo che le variabili che figurano complessivamente in esse (potendo in qualche funzione esservene solo una parte) siano $x_1, x_2, \dots, x_n$; e quindi considereremo le m funzioni omogenee:

$$u_1(x_1, x_2, \dots, x_n), u_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, u_m(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Anche questa volta, se le u sono tutte di grado zero, qualsivoglia funzione delle u sarà pure omogenea di grado zero.

Se poi le u hanno tutte lo stesso grado ρ di omogeneità, diverso da zero, affinchè una funzione

$$f(u_1, u_2, \dots, u_m) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

sia omogenea di grado k nelle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$, sarà necessario e sufficiente che, per ogni sistema di valori delle variabili

$$x_1, x_2, \dots, x_n, t,$$

si abbia:

$$f(t^\rho u_1, t^\rho u_2, \dots, t^\rho u_m) = t^k f(u_1, u_2, \dots, u_m).$$

Il che significa che la funzione

$$f(u_1, u_2, \dots, u_m)$$

delle m variabili $u_1, u_2, \dots, u_m$ è omogenea, di grado k/ρ , rispetto a queste.

Dunque: *Soltanto le funzioni omogenee di date funzioni omogenee, aventi lo stesso grado (non nullo) di omogeneità, restano omogenee anche rispetto alle variabili di queste date funzioni.*

⁽¹⁾ Una funzione della sola variabile x , che sia omogenea di grado b , è necessariamente della forma

$$f(x) = ax^b,$$

con a costante arbitraria, come è facile riconoscere.

Supposto poi che i gradi di omogeneità $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ non siano tutti uguali tra loro, e nessuno sia nullo, osserveremo che le funzioni

$$v_1 = u_1^{\frac{1}{\rho_1}}, \quad v_2 = u_2^{\frac{1}{\rho_2}}, \dots \quad v_m = u_m^{\frac{1}{\rho_m}}$$

sono omogenee di primo grado nelle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$. Perciò ogni funzione omogenea nelle v — che sarà una funzione delle u non sempre omogenea rispetto a queste — risulterà funzione omogenea nelle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$, per quanto fu visto innanzi. Ed ora proveremo che nessun'altra funzione delle u potrà risultare funzione omogenea delle $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Infatti la funzione

$$f(u_1, u_2, \dots, u_m) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

sarà omogenea (di grado k) nelle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ solo quando risulti soddisfatta la condizione di EULERO:

$$\sum_r x_r \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} = k \varphi.$$

Ma essendo:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_r} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_r},$$

ne ricaviamo:

$$\sum_r x_r \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial u_i} \sum_r x_r \frac{\partial u_i}{\partial x_r} \right) = \sum_i \rho_i u_i \frac{\partial f}{\partial u_i}.$$

Possiamo dunque dire che la funzione risultante $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sarà ancora omogenea solo quando si scelga per $f(u_1, u_2, \dots, u_m)$ una funzione che soddisfi all'equazione a derivate parziali:

$$(1) \quad \sum_i \rho_i u_i \frac{\partial f}{\partial u_i} = k f.$$

Ma se in questa assumiamo come nuove variabili le altre:

$$v_1 = u_1^{\frac{1}{\rho_1}}, \quad v_2 = u_2^{\frac{1}{\rho_2}}, \dots, \quad v_m = u_m^{\frac{1}{\rho_m}},$$

essa diventa:

$$\sum v_i \frac{\partial f}{\partial v_i} = k f.$$

E quest'ultima ci dice che ogni suo integrale è una funzione omogenea (di grado k) nelle variabili $v_1, v_2, \dots, v_m$. Perciò ogni integrale

$$f(u_1, u_2, \dots, u_m)$$

dell'equazione (1) è una funzione omogenea delle quantità

$$u_1^{\frac{1}{\rho_1}}, \quad u_2^{\frac{1}{\rho_2}}, \dots, \quad u_m^{\frac{1}{\rho_m}}.$$

Dopo ciò, possiamo concludere:

Se $u_1, u_2, \dots, u_m$ sono funzioni omogenee nelle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ le sole funzioni delle u che risultano ancora omogenee nelle dette variabili sono le funzioni omogenee delle quantità

$$u_1^{\frac{1}{\rho_1}}, \quad u_2^{\frac{1}{\rho_2}}, \dots, \quad u_m^{\frac{1}{\rho_m}},$$

dove $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ indicano i gradi di omogeneità delle date funzioni, supposti differenti da zero e non tutti uguali tra loro.

Il caso più generale è quello in cui tra le funzioni omogenee $u_1, u_2, \dots, u_m$ ve ne siano alcune — ma non tutte — di grado nullo; e siano queste $u_1, u_2, \dots, u_i$.

Allora la condizione (1) a cui deve soddisfare ogni funzione

$$f(u_1, u_2, \dots, u_m)$$

per risultare omogenea (di grado k) nelle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ si riduce all'altra:

$$(2) \quad \rho_{i+1} u_{i+1} \frac{\partial f}{\partial u_{i+1}} + \dots + \rho_m u_m \frac{\partial f}{\partial u_m} = k f.$$

Se conserviamo le variabili $u_1, u_2, \dots, u_i$ e in luogo delle rimanenti poniamo le altre:

$$v_{i+1} = u_{i+1}^{\frac{1}{\rho_{i+1}}}, \quad v_{i+2} = u_{i+2}^{\frac{1}{\rho_{i+2}}}, \dots, \quad v_m = u_m^{\frac{1}{\rho_m}},$$

la precedente condizione diventa:

$$v_{i+1} \frac{\partial f}{\partial v_{i+1}} + \dots + v_m \frac{\partial f}{\partial v_m} = k f.$$

E questa ci dice che, riguardando come costanti le variabili $u_1, u_2, \dots, u_i$, la funzione f si riduce ad essere omogenea, di grado k , nelle quantità:

$$v_{i+1}, \quad v_{i+2}, \dots, \quad v_m.$$

Perciò dovremo avere:

$$(3) \quad f(u_1, u_2, \dots, u_m) = v_m^k \cdot \Phi\left(u_1, u_2, \dots, u_i, \frac{v_{i+1}}{v_m}, \frac{v_{i+2}}{v_m}, \dots, \frac{v_{m-1}}{v_m}\right),$$

dove Φ è simbolo di funzione arbitraria delle quantità:

$$u_1, u_2, \dots, u_i, \frac{v_{i+1}}{v_m}, \dots, \frac{v_{m-1}}{v_m};$$

al che, del resto, si perviene subito integrando l'equazione a derivate parziali (2) — che è lineare del primo ordine — con l'uso del sistema ausiliario di equazioni differenziali.

In particolare, potremo prendere per f il prodotto di una funzione arbitraria delle variabili $u_1, u_2, \dots, u_i$ per una qualsivoglia funzione omogenea (di grado k) delle variabili

$$v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_m$$

cioè:

$$f(u_1, u_2, \dots, u_m) = \Phi(u_1, u_2, \dots, u_i) F(v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_m)$$

dove Φ è simbolo di funzione arbitraria e F di funzione omogenea.

Oppure potremo prendere:

$$f(u_1, u_2, \dots, u_m) = v_m^k \Phi(u_1, \dots, u_i) + F(v_{i+1}, \dots, v_m)$$

purchè il grado di omogeneità di F rispetto alle v sia k .

Naturalmente, se tra le u , soltanto la u_m avesse un grado ρ di omogeneità diverso da zero, l'espressione generale (3) della funzione f diventerebbe:

$$f(u_1, u_2, \dots, u_m) = v_m^k \Phi(u_1, u_2, \dots, u_{m-1}),$$

essendo:

$$v_m = u_m^{\frac{1}{\rho}}$$

e Φ simbolo di funzione arbitraria.

Per esempio, se u_1, u_2, u_3 sono tre funzioni omogenee nelle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$, coi gradi di omogeneità 0, 1, 2, rispettivamente, tutte le funzioni di u_1, u_2, u_3 che sono ancora omogenee nelle suddette variabili hanno la seguente espressione:

$$f(u_1, u_2, u_3) = u_3^{\frac{k}{2}} \Phi\left(u_1, \frac{u_2}{\sqrt{u_3}}\right),$$

dove k indica il grado di omogeneità — da stabilirsi ad arbitrio — della funzione risultante e Φ una funzione arbitraria delle quantità u_1 e $\frac{u_2}{\sqrt{u_3}}$.

Firenze, 19 febbraio 1927.