
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

G. THOMSEN

Un teorema topologico sulle schiere di curve e una caratterizzazione geometrica delle superficie isotermo-asintotiche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 6 (1927), n.2, p. 80–85.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_2_80_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_2_80_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_2_80_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Un teorema topologico sulle schiere di curve e una caratterizzazione geometrica delle superficie isoterma-asintotiche.

Nota di G. THOMSEN (ad Hamburg).

Sia dato nel piano un sistema C di curve.

Le curve siano differenziabili tre volte.

Per ogni punto d'un certo campo G di regolarità passino tre curve differenti, che non si toccano, una per ogni sistema. Noi dimostreremo:

Affinchè esista una trasformazione continua e biunivoca dei punti di G sui punti d'un campo G^ d'un altro piano, che trasformi le curve C in tre schiere di rette parallele di G^* , è necessario e sufficiente, che nel sistema C valga la configurazione seguente, che noi vogliamo chiamare la configurazione degli esagoni.*

Indichiamo i sei tratti delle tre curve uscenti da un punto P di G , colle lettere $a_1, a_2 \dots a_6$, come mostra la fig. 1.

Scegliendo sopra a_1 un nuovo punto P_1 , si può trarre per P_1 la curva del sistema, appartenente alla terza schiera, diversa da quella di a_1 e quella di a_2 . Questa curva sega a_2 in un punto P_2 .

Conduciamo poi per P_2 la curva terza del sistema, che manca ancora, fino all'intersezione P_3 con a_2 ; così continuando si trae da P_3 il punto P_4 ecc. Se si trae in ultimo da P_6 la curva fino all'intersezione con a_1 , si troverà generalmente un punto P_7 , differente da P_1 .

Ora noi diciamo: *Nel nostro sistema C di curve vale la configurazione degli esagoni, se — P e P_1 essendo arbitrarii — si perviene*

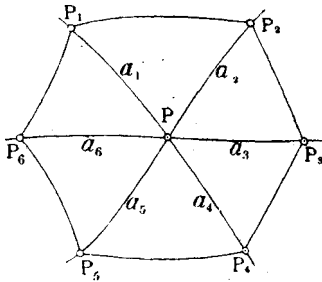


Fig. 1.

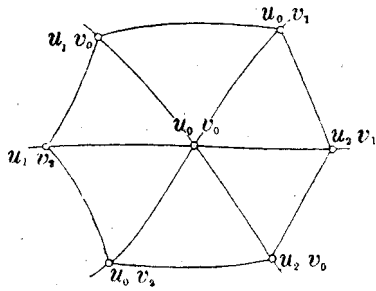


Fig. 2.

per ogni figura, che si estende nell'interno del campo G, ad un esagono chiuso.

Per la dimostrazione del teorema enunciato in principio, introduciamo tali coordinate curvilinee u, v , che $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ rappresentino due delle schiere del sistema.

Poi la terza sia data nella forma

$$\varphi(u, v) = \text{cost.}$$

Noi possiamo ammettere, che $\varphi_u \neq 0$ e $\varphi_v \neq 0$, perchè altrimenti almeno due delle tre curve si toccherebbero in un punto. Siano u_0, v_0 le coordinate di P . Per gli altri punti possiamo introdurre nel caso dell'esagono chiuso le coordinate indicate nella fig. 2. Essa mostra, che P_2, P e P_5 stanno sulla curva $u = u_0$, P_1 e P_6 sulla $u = u_1$, P_3 e P_4 sulla $u = u_2$, poi P_1, P e P_4 sulla curva $v = v_0$, P_2 e P_3 sulla $v = v_1$, P_5 e P_6 sulla $v = v_2$. Inoltre P_1 e P_2 appartengono alla stessa curva $\varphi = \text{cost.}$, come pure P_6, P e P_3 e in ultimo anche P_4 e P_5 . Donde segue:

- (1) $\varphi(u_0, v_1) = \varphi(u_1, v_0)$
- (2) $\varphi(u_2, v_1) = \varphi(u_0, v_0) = \varphi(u_1, v_2)$
- (3) $\varphi(u_0, v_2) = \varphi(u_2, v_0).$

Qui sono arbitrarii col punto P le grandezze u_0, v_0 , e poi col punto P_1 , che si può scegliere arbitrariamente sulla $v = v_0$, anche u_1 .

Quando è data la schiera $\varphi = \text{cost.}$ si determina v_1 e quindi anche P_2 da u_0, v_0, u_1 secondo (1). Da (2)₁ poi si determinano u_2 e il punto P_3 ; quindi nello stesso tempo viene fissato anche P_4 , perchè u_2 e v_0 sono noti. Da (3) si può trarre v_2 , (quindi P_5), e poi sono note anche le coordinate u_1, v_2 di P_6 .

Per conseguenza noi possiamo ammettere, che le equazioni

$$(4) \quad \varphi(u_0, v_1) = \varphi(u_1, v_0)$$

$$(5) \quad \varphi(u_2, v_1) = \varphi(u_0, v_0)$$

$$(6) \quad \varphi(u_0, v_2) = \varphi(u_2, v_0)$$

servano alla determinazione di v_1, v_2, v_2 dalle grandezze arbitrarie u_0, v_0, u_1 .

La validità della configurazione degli esagoni si esprime in maniera, che in P_6 si incontrano le tre curve: la curva $u = u_1$ per P_1 , la curva $v = v_2$ per P_5 e la curva $\varphi = \varphi(u_0, v_0)$ per P . Ha valore dunque per le coordinate di P_6 l'equazione (2)₆:

$$(7) \quad \varphi(u_1, v_2) = \varphi(u_0, v_0).$$

Quindi: La funzione φ deve essere tale, che l'equazione (7) venga soddisfatta identicamente per tutti i valori arbitrarii di u_0, v_0, u_1 e i valori corrispondenti di v_1, u_2, v_2 determinati da (4) (5) (6).

Dobbiamo naturalmente aggiungere, che ciò che precede vale necessariamente solo per quelli $u_0, v_0, u_1 \dots v_2$, per i quali l'esagono si trova nell'interno di G .

Essendo $\{u_0, v_0\}$ un punto di G questa condizione sarà sempre soddisfatta, se u_1 e u_2 differiscono abbastanza poco da u_0 , e se v_1 e v_2 differiscono abbastanza poco da v_0 .

Fissiamo prima il punto $P\{u_0, v_0\}$ e esaminiamo la totalità degli esagoni con questo « centro ». Allora per tutti i valori di u_1 abbastanza vicini a u_0 e i corrispondenti v_1, u_2, v_2 determinati da (4) (5) (6), deve valere la (7) identicamente.

Ora sviluppiamo l'equazioni (4) (5) (6) (7) nell'intorno del punto u_0, v_0 per potenze di $u_i = u_i - u_0 [i = 1, 2]$ e $v_i = v_i - v_0$.

La (4) dà:

$$(4.) \quad \begin{aligned} & \overset{\circ}{\varphi} + \overset{-}{v_1} \overset{\circ}{\varphi}_v + \frac{1}{2} \overset{-}{v_1^2} \overset{\circ}{\varphi}_{vv} + \frac{1}{6} \overset{-}{v_1^3} \overset{\circ}{\varphi}_{vvv} + \dots = \\ & = \overset{\circ}{\varphi} + \overset{-}{u_1} \overset{\circ}{\varphi}_u + \frac{1}{2} \overset{-}{u_1^2} \overset{\circ}{\varphi}_{uu} + \frac{1}{6} \overset{-}{u_1^3} \overset{\circ}{\varphi}_{uuu} + \dots, \end{aligned}$$

dove il segno $^{\circ}$ sopra le φ indica, che le funzioni corrispondenti devono essere calcolate pel punto $\{u_0, v_0\}$. Ma noi ometteremo il segno $^{\circ}$ nella trattazione seguente per semplicità di scrittura.

Ricaviamo v_1 in funzione di $\bar{u}_1$ dalla (4_a). Poniamo:

$$(8) \quad \bar{v}_1 = A\bar{u}_1 + B\bar{u}_1^2 + C\bar{u}_1^3 + \dots!$$

Il paragone dei coefficienti in (4_a) fornisce:

$$(9) \quad \begin{aligned} A &= \frac{\varphi_u}{\varphi_v}; & B &= \frac{1}{2\varphi_r^3}(\varphi_{uu}\varphi_r^2 - \varphi_{rv}\varphi_u^2) \\ C &= \frac{1}{6\varphi_r^4}(\varphi_{uuu}\varphi_r^3 - \varphi_{rvr}\varphi_u^3) - \frac{\varphi_u\varphi_{rr}}{\varphi_r^2}B. \end{aligned}$$

Adesso possiamo introdurre il valore di $\bar{v}_1$, dato da (8) e (9), nella (5). Sviluppiamo prima questa equazione (5) nella serie:

$$(5_{..}) \quad \begin{aligned} \varphi + \bar{u}_2\varphi_u + \bar{v}_1\varphi_v + \frac{1}{2}(\bar{u}_2^2\varphi_{uu} + 2\bar{u}_2\bar{v}_1\varphi_{uv} + \bar{v}_1^2\varphi_{vv}) \\ + \frac{1}{6}(\bar{u}_2^3\varphi_{uuu} + 3\bar{u}_2^2\bar{v}_1\varphi_{uur} + 3\bar{u}_2\bar{v}_1^2\varphi_{uvr} + \bar{v}_1^3\varphi_{vrr}) + \dots = \varphi. \end{aligned}$$

Introducendo la (8) nella (5_{..}), abbiamo;

$$(10) \quad \begin{aligned} (\bar{u}_1 + \bar{u}_2)\varphi_u + \frac{1}{2}(\bar{u}_1^2 + \bar{u}_2^2)\varphi_{uu} + \bar{u}_1\bar{u}_2\frac{\varphi_u\varphi_{uv}}{\varphi_v} \\ + \frac{1}{6}(\bar{u}_1^3 + \bar{u}_2^3)\varphi_{uuu} + \frac{1}{2}\bar{u}_1\bar{u}_2\left[\varphi_{uur}\frac{\varphi_u^2}{\varphi_r^2} + \frac{\varphi_{uvr}}{\varphi_r^3}(\varphi_{uu}\varphi_r^2 - \varphi_{rv}\varphi_u^2)\right] \\ + \frac{1}{2}\bar{u}_1\bar{u}_2^2\frac{\varphi_{uvr}\varphi_u}{\varphi_r} + \dots = 0. \end{aligned}$$

Nello stesso modo come $\bar{v}_1$ da $\bar{u}_1$ mediante la (4), possiamo anche calcolare $\bar{v}_2$ da $\bar{u}_2$ per mezzo la (6). Siccome nelle due equazioni (4) e (6) sono scambiati soltanto gli indici 1 e 2 presso gli u, v , avremo qui:

$$(11) \quad \bar{v}_2 = A\bar{u}_2 + B\bar{u}_2^2 + C\bar{u}_2^3 + \dots$$

cogli stessi coefficienti A, B, C , che figuravano anche nella (8), dati da (9).

Introducendo il valore $\bar{v}_2$, dato dalla (11) nell'equazione (7) nella stessa maniera, come abbiamo introdotto il valore (8) di $\bar{v}_1$ nella (5), ricaveremo una equazione (12). Poichè anche (5) e (7) differiscono soltanto negli indici 1 e 2 scambiati, avremo:

$$(12) \quad \text{risulta da (10) collo scambio di } \bar{u}_1 \text{ e } \bar{u}_2.$$

Ora però, se noi fissiamo u_0 e v_0 , l'equazione (12) deve valere identicamente per tutti i valori di u_1, u_2 abbastanza vicini a u_0 ,

che soddisfano la (10). Perciò la (12) deve essere la stessa equazione in $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ come la (10), ad eccezione tutt'al più d'un fattore nel suo primo membro. Ma questo fattore è eguale a 1, perchè i termini fino al terzo ordine negli $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ nella (10) e nella (12) sono identici ad eccezione soltanto dei fattori di $\bar{u}_1^2 \bar{u}_2$ e $\bar{u}_1 \bar{u}_2^2$. Pel fatto che il coefficiente di $\bar{u}_1^2 \bar{u}_2$ nella (10) è nello stesso tempo il coefficiente di $\bar{u}_1 \bar{u}_2^2$ in (12) e viceversa, devono essere eguali i due coefficienti di $\bar{u}_1^2 \bar{u}_2$ e $\bar{u}_1 \bar{u}_2^2$ in (10).

Quindi segue:

$$\varphi_{uuu} \frac{\varphi_u}{\varphi_v} = \varphi_{rvv} \frac{\varphi_u^2}{\varphi_v^2} + \frac{\varphi_{uv}}{\varphi_v^3} \varphi_{uu} \varphi_v^2 - \varphi_{vv} \varphi_u^2$$

o anche

$$\frac{\varphi_{uvv} \varphi_u - \varphi_{uv} \varphi_{uv}}{\varphi_{uv}^2} = \frac{\varphi_{rvv} \varphi_v - \varphi_{vv} \varphi_{ru}}{\varphi_v^2}$$

o alfine

$$(13) \quad (\lg \varphi_u)_{uv} = (\lg \varphi_v)_{uv}.$$

La (13) vale come per il « centro » u_0, v_0 ; anche per ogni altro centro in G ; quindi essa vale nel campo G degli u, v identicamente.

Dalla (13) si ricava per integrazione:

$$\varphi_u \cdot U = \varphi_v \cdot V,$$

dove U è una funzione dell'unico argomento u , e V è una funzione di v . Per una scelta conveniente dei parametri u, v sulle curve $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ si può fare $U = V = 1$.

L'integrazione della equazione $\varphi_u = \varphi_v$ fornisce allora

$$\varphi = f(u + v),$$

dov'è f una funzione dell'unico argomento $u + v$. Le curve $\varphi = \text{cost.}$ sono dunque le curve

$$u + v = \text{cost.}$$

Con questo la dimostrazione è finita, poichè noi possiamo prendere gli u, v come coordinate cartesiane d'un nuovo piano. Ora al campo G corrisponde un campo G^* di questo piano cartesiano, nel quale le tre schiere di curve $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$, $u + v = \text{cost.}$ sono delle rette. Poichè viceversa i sistemi di tre schiere di rette e i loro trasformati posseggono la configurazione degli esagoni, la proprietà enunciata è caratteristica per essi.

Col nostro teorema si possono caratterizzare geometricamente le *superficie isoterma-asintotiche*, che rappresentano nella geometria

proiettivo-differenziale una delle famiglie più importanti ⁽¹⁾. Su queste superficie si può, come è noto, nel caso della curvatura ellittica introdurre tali parametri u, v , che le tre schiere delle curve di DARBOUX sono date da

$$u = \text{cost.}; \quad v = \text{cost.}; \quad u + v = \text{cost.};$$

ma nel caso d'una curvatura iperbolica si possono introdurre tali parametri, in guisa che le linee asintotiche vengono rappresentate da $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$, e l'unica schiera reale delle curve di DARBOUX da $u + v = \text{cost.}$

Quindi:

Fra le superficie a curvatura ellittica le superficie isotermo-asintotiche sono le sole, sulle quali le tre schiere reali delle curve di Darboux godono della configurazione degli esagoni; fra le superficie curve iperbolicamente le isotermo-asintotiche sono le uniche che hanno due schiere di asintotiche e una schiera di curve di Darboux, tutte e tre reali, che possiedono insieme quella configurazione.

Se noi chiamiamo *traiettorie anarmoniche* del nostro sistema quelle curve, che segano in ogni punto le tre curve del sistema secondo un birapporto costante, la configurazione vale anche per tre schiere anarmoniche arbitrarie, che corrispondono a tre valori fissi del birapporto. Poichè le traiettorie anarmoniche del nostro sistema di tre schiere di rette parallele sono egualmente rette. Sulle superficie isotermo-asintotiche vale dunque quella configurazione anche per ogni tale terna di schiere di curve anarmoniche ⁽²⁾.

Alla fine menzioniamo ancora un teorema sulle *superficie isoterme* ordinarie, sulle quali le linee di curvatura formano una rete isoterma: *Le superficie isoterme si caratterizzano in modo che tre schiere arbitrarie di traiettorie isogonali delle linee di curvatura, corrispondenti a tre valori fissi d'angolo, possiedono la configurazione degli esagoni.*

⁽¹⁾ G. FUBINI-E. CECI: *Geometria proiettiva-differenziale*, Tomo I, (pag. 109 e § 51).

⁽²⁾ Il primo a considerare le curve anarmoniche della curve di DARBOUX sopra una superficie è stato E. BOMPIANI: *Le forme di Fubini nella teoria proiettiva delle superficie*. (Ist. Lombardo, vol. LVII, 1924, n. 4). Il BOMPIANI ha dimostrato nello stesso numero della nota citata che per le superficie isotermo-asintotiche e per esse soltanto è possibile una rappresentazione che muti le asintotiche della superficie in un reticolato cartesiano e le curve anarmoniche in rette del piano.