Bollettino Unione Matematica Italiana

Giuseppe Belardinelli

Su una generalìzzazióne dell'operazione di somma del Calcolo delle differenze

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (1927), n.2, p. 70–72.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_2_70_0>

Su una generalizzazione dell'operazione di somma del Calcolo delle differenze.

Nota di GIUSEPPE BELARDINELLI (a Cagliari).

1. In una nota recente (1) ho generalizzato l'operazione di somma del Calcolo delle differenze, cioè ho considerato l'equazione fondamentale

$$\underset{s}{\Delta} f(x) = \frac{F(s(x)) - F(x)}{s(x) - x} = \varphi(x),$$

ove $s(x)$ è una sostituzione iperbolica fuchsiana e $\varphi(x)$ una funzione data.

(1) G. BELARDINELLI, « Boll. dell'Unione Matematica », anno IV, n. 5.

Una nota recente di J. WOLFF [1] mi dà l'occasione di considerare una equazione più generale della indicata, fondandomi sul seguente teorema, interessantissimo per la iterazione delle funzioni analitiche, a lui dovuto e di cui DENJOY [2] ha data una elegante dimostrazione: « Se $f(z)$ è regolare per $|z|<1$ e « continua per $|z|\leq 1$, non lineare, $|f(z)|<1$, e $f(z)\neq z$ per $|z|<1$, « se si pone $f_n=f(f_{n-1}(z))$, allora per ciascun punto interno « di C ($|z|=1$) la successione $f_n(z)$ converge verso un punto « di C indipendente da z ».

2. Consideriamo l'equazione:

$$\Delta(f)\,\{F(x)\} = \frac{F(f(x))-F(x)}{f(x)-x} = \varphi(x), \tag{1}$$

ove $f(x)$ soddisfa alle condizioni del teorema di WOLFF e $\varphi(x)$ è una funzione data.

In generale avremo:

$$\Delta(f)\,\{F(f_{k-1}(x))\} = \frac{F(f_k(x))-F(f_{k-1}(x))}{f_k(x)-f_{k-1}(x)} = \varphi(f_{k-1}(x)),$$

sommando da $k=1$ ad n, si ha:

$$F(x)-F(f_n(x)) = -\sum_{k=1}^{k=n}(f_k(x)-f_{k-1}(x))\,\varphi(f_{k-1}(x)).$$

La $f_n(x)$ per $n\to\infty$ tenderà ad un punto α della circonferenza $C(|x|=1)$, perciò, se la serie

$$-\sum_{k=1}^{k=\infty}(f_k(x)-f_{k-1}(x))\,\varphi(f_{k-1}(x))$$

sarà convergente, avremo che sarà una soluzione della (1) e scriveremo:

$$F(x)=\mathrm{S}\varphi(x)\Delta(f).$$

3. Supponiamo che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x)-f_{k-1}(x)|$$

sia convergente, come già si è veduto nella nota [1] citata, per

[1] J. WOLFF, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, t. 182 (1926), pag. 42, 200, 918.

[2] A. DENJOY, Ibidem, 182 (1926), pag. 255.

le sostituzioni lineari, allora se $\varphi(x)$ è analitica regolare entro il cerchio $|x| = 1$, od a carattere razionale in esso, la serie

$$-\sum_{h=n}^{\infty} (f_h(x) - f_{h-1}(x))\, \varphi(f_{h-1}(x))$$

sarà soluzione della (1), ad eccezione degli eventuali punti singolari della $\varphi(x)$ entro il cerchio $|x| = 1$.