Ugo Broggi

Sulla serie di Lagrange

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (1927), n.2, p. 68–70.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_2_68_0>

Sulla serie di Lagrange.

Nota di UGO BROGGI (a Buenos Ayres).

1. L'equazione

$$F(x,\ y) = y - b - xf(y) = 0 \tag{1}$$

dove $f(y)$ indica una funzione analitica regolare in un campo del piano y contenente il punto b e differente da zero per $y = b$, definisce in un certo intorno del punto $x = 0$ una radice $\alpha(x)$ uguale a b per $x = 0$ priva di punti critici apparenti.

Perchè un punto critico sia apparente è infatti necessario sia, non solo

$$F(x,\ y) = 0$$

$$\frac{\partial F(x,\ y)}{\partial y} = 1 - xf'(y) = 0$$

ma anche

$$\frac{\partial F(x,\ y)}{\partial x} = -f(y) = 0.$$

Per la (1) a $f(y) = 0$ corrisponde $y = b$, mentre $f(b) \neq 0$.

Se ne deduce che il raggio r di convergenza della serie di LAGRANGE

$$\alpha(x) = b + xf(b) + \frac{x^2}{2!} D \cdot f(b)^2 + \ldots$$

non solo « non è inferiore » (¹) ma « è uguale » al minimo valore delle η_i, $(i = 1,\ 2, \ldots)$, dove

$$\eta_i = \frac{1}{|f'(y_i)|}$$

e le y_i sono le radici dell'equazione

$$f(y) - (y - b)f'(y) = 0 \tag{2}$$

ottenuta eliminando x dal sistema

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

(¹) Cfr. S. PINCHERLE, *Gli elementi della teoria delle funzioni analitiche*, Parte prima, pag. 242.

2. Senonchè può osservarsi che lo sviluppo di LAGRANGE consente d'ottenere una delle radici dell'equazione (1), o, più generalmente, lo sviluppo di una funzione olomorfa qualunque di questa radice, in serie di potenze di x, e che il problema di determinare tutte le radici y_1. $y_2, \ldots$ della (2) può presentare difficoltà non minori di quelle presentate dal problema originario.

Ciò spiega che la teoria della serie di LAGRANGE si limiti generalmente a determinare il massimo valore ρ di $|x|$ tale che in ogni punto di una curva chiusa C, appartenente al campo di regolarità di $f(y)$ e nel cui interno si trova b

$$|y - b| > |xf(y)|$$

A $|x| \leq \rho$ corrisponde una sola radice di (1) appartenente all'interno di C e rappresentata dallo sviluppo di LAGRANGE, che converge [1].

Si presenta il problema se non sia possibile, data una radice y_1 della (2), di vedere se essa corrisponda al minimo valore di η e cioè al punto critico più prossimo a $x = 0$.

Ove ciò non sia, la serie

$$b + \eta_1 f(b) + \frac{\eta_1^2}{2!} D \cdot f(b)^2 + \ldots \tag{3}$$

diverge. E poichè, per il teorema ricordato, ove nei punti di una curva C fosse

$$|y - b| > \eta_1 |f(y)|$$

la (3) convergerebbe, se ne deduce che questa disuguaglianza non può essere soddisfatta. Nè, ove ε sia positivo ed arbitrariamente piccolo, può esserlo

$$|y - b| > (\eta_1 - \varepsilon) |f(y)| \tag{4}$$

che può esserlo invece se y_1 corrisponde al minimo valore delle η_i. La (4) è dunque una condizione sufficiente perchè y_1 corrisponda al punto critico più prossimo a $x = 0$.

3. Ove $\dfrac{f(y)}{f'(y)}$ sia regolare in un campo Γ del piano y contenente il punto b, e si abbia in ogni punto di una curva chiusa C_1 appartenente a Γ e contenente b

$$|y - b| > (1 - \varepsilon') \left| \frac{f(y)}{f'(y)} \right|$$

[1] Cfr. ad es. EDOUARD GOURSAT, *Cours d'Analyse Mathématique*. Paris 1911, Vol. II, pag. 121 e seguenti.

dove ε' è positivo ed arbitrariamente piccolo, la serie

$$b + \frac{f(b)}{f'(b)} + \frac{1}{2!} D\left(\frac{f(b)}{f'(b)}\right) + \dots$$

converge e rappresenta lo sviluppo dell'unica radice y_1 di (2) rinchiusa da C_1. La (2) non è infatti che il caso particolare, corrispondente a $x = 1$, dell'equazione

$$y - b - x \frac{f(y)}{f'(y)} = 0.$$

E sarà

$$r = \eta_1$$

il raggio di convergenza della serie di LAGRANGE

$$b + xf(b) + \frac{x^2}{2!} D \cdot f(b)^2 + \dots$$

corrispondente alla (1) se si ha ad un tempo

$$|y - b| > (\eta_1 - \varepsilon) \, |f(y)|$$

nei punti di una C

$$|y - b| > (1 - \varepsilon') \, |f(y)|$$

nei punti di una C_1.

Buenos Ayres, dicembre 1926.