Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Giovanni Giorgi

Serie analitica per lo sviluppo delle funzioni di variabile reale

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (1927), n.2, p. 63–67.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_2_63_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1927.

Serie analitica per lo sviluppo delle funzioni di variabile reale (*).

Nota di GIOVANNI GIORGI (a Roma).

Una funzione di variabile reale $\varphi(z)$, data con quel grado di arbitrarietà che può presentarsi nelle funzioni fisiche (ove il caso di discontinuità è più frequente e più importante che quello di continuità), in tutto l'intervallo $-\infty < z < +\infty$, non si presta ai più comuni sviluppi: p. es. non è rappresentabile in serie di FOURIER, qualora non si supponga periodica; e nemmeno, generalmente, in integrale di FOURIER, poichè questo sviluppo implica condizioni di annullamento all'infinito, che portano a escludere

(*) Riassunto, dall'originale in lingua portoghese « *Sôbre a série* $\sum_{-\infty}^{+\infty} A_n\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n$ » di GIOVANNI GIORGI, pubblicato negli Atti dell'Istituto di Coimbra, vol. LXXIII (1926), n. 5; per cura dello stesso Autore.

funzioni comunissime, come p. es. le costanti; e non sempre conviene rappresentarla come limite di funzioni continue, o di funzioni atte a uno degli sviluppi precedenti.

Per arrivare a una rappresentazione analitica in forma semplice, considero in generale una serie di TEIXEIRA (¹), il cui tipo è

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} A_n [\theta(z)]^n ; \tag{1}$$

e dopo aver rilevato che queste serie di TEIXEIRA stanno alle serie di BURMANN $\sum\limits_0^{\infty} A_n[\theta(z)]^n$ nella stessa relazione come le serie di LAURENT a quelle di TAYLOR, e devono quindi permettere applicazioni anche al di fuori del campo analitico, faccio una scelta speciale della $\theta(z)$ in modo che la regione a guisa di corona, non circolare ma curvilinea qualunque, entro cui la serie di TEIXEIRA converge, abbia forma tale che possa contenere l'asse reale nel suo interno, ed eventualmente ridursi all'asse stesso, assumendo la forma di una striscia il cui spessore limite sia nullo.

Ottengo questo scegliendo

$$\theta(z) = \frac{z - i}{z + i}.$$

In effetto, posto

$$\frac{z - i}{z + i} = e^{it}; \quad t = \frac{1}{i} \log \frac{z - i}{z + i} \tag{2}$$

ovvero sotto forma reale

$$z = \operatorname{tg} \frac{t + \pi}{2} \qquad t = 2 \operatorname{arctg} z + \pi \tag{3}$$

e prendendo t come variabile principale, si ha che t varia tra 0 e 2π quando z varia per valori reali tra $-\infty$ e $+\infty$. La sostituzione fatta equivale quindi a una proiezione « stereografica » e biunivoca dei punti dell'asse reale sopra i punti di una circonferenza opportunamente scelta; e la funzione $\varphi(z)$ data arbitrariamente sull'asse reale diviene una funzione $\psi(t)$ data sulla cir-

(¹) E. GOMES TEIXEIRA: *Sôbre o desenvolvimento das funções em série*; Memorias de la Real Accademia de Ciencias de Madrid, tomo XVIII, parte 1, (1897), pp. 1-119; *Sur les séries ordonnées suivant les puissances d'une fonction donnée*: Crelle's Journal für die reine u. angewandte Mathematik, Bd. 122 (1900), pp. 97-123; WHITTAKER. *Modern Analysis*, Cambridge 1902, Ch. VI, pp. 102-106, No. 66-67.

conferenza, e quindi periodica col periodo 2π. La particolare serie di TEIXEIRA che ho formato si trasforma allora nella serie di FOURIER

$$\psi(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{int}. \tag{4}$$

Le condizioni per la validità di quest' ultima si lasciano additare facilmente in forma molto lata, atta per le applicazioni fisiche, in base ai teoremi di RIEMANN, di JORDAN e di LEBESGUE [1]. Affinchè la (4) sia valida in un punto t, è sufficiente, senza essere necessario, che $\psi(t)$, data, limitata o illimitata, nell' intervallo $(0,2\pi)$, sia ivi integrabile secondo LEBESGUE (il che implica integrabilità assoluta) e che nel punto particolare considerato soddisfi a una condizione che dipende dal comportamento della funzione in questo punto solamente.

Quest' ultima condizione, che si chiamerà per brevità « condizione A », è soddisfatta se il punto t è interno a un segmento finito nel quale $\psi(t)$ sia a variazione limitata (condizione di JORDAN), o se da ambe le parti del punto è verificata la condizione di LIPSCHITZ-DINI generalizzata da LEBESGUE, oppure se $\psi(t)$ è la somma di due funzioni, una delle quali soddisfaccia alla condizione di JORDAN, l' altra alla condizione di LIPSCHITZ-DINI-LEBESGUE; e se oltre a ciò si suppone che quando t sia un punto di discontinuità di prima specie, sia

$$\psi(t) = \frac{1}{2} \{ \psi(t-0) + \psi(t+0) \}.$$

Ora, la condizione che $\psi(t)$ sia assolutamente integrabile nell' intervallo $(0,2\pi)$ si trasforma in quella della convergenza assoluta dell' integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(z)}{z^2+1}\, dz$$

e si può decomporre in due: che $\varphi(z)$ sia (assolutamente) integrabile secondo LEBESGUE in qualunque intervallo finito: e che gli

(1) Veggasi: LEBESGUE, *Leçons sur les séries trigonométriques*, Paris, Gauthier-Villars, 1906, Ch. III; HOBSON, *The theory of functions of real variables*, Cambridge, The University Press (1902); e anche il fascicolo speciale redatto da HILB e RIESZ nell' Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Leipzig, Band II 3, Heft 8, 1924.

integrali

$$\int^{+\infty} \frac{|\varphi(z)|}{z^2} dz; \qquad \int_{-\infty} \frac{|\varphi(z)|}{z^2} dz; \tag{6}$$

convergano. La condizione che abbiamo chiamato A si trasforma in una condizione della stessa forma per $\varphi(z)$, da essere soddisfatta in quei punti singoli dove lo sviluppo si vuole applicare per trovare il valore della funzione.

In Conclusione:

Se $\varphi(z)$ è una funzione di variabile reale, limitata o illimitata, continua o discontinua in modo qualunque, data in tutto l'intervallo $-\infty < z < +\infty$, arbitrariamente, senza restrizione di periodicità;

se $\varphi(z)$ è integrabile secondo Lebesgue in qualunque intervallo finito;

se $|\varphi(z)|$ per $z = \pm\infty$ non cresce in modo tale che gli integrali (6) perdano la convergenza;

si può scrivere

$$\varphi(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n \tag{7}$$

dove i coefficienti A_n si trovano con la formula di Teixeira, che dà

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z) \frac{(z+i)^{n-1}}{(z-i)^{n+1}} dz; \tag{8}$$

e la serie (7) converge e rappresenta $\varphi(z)$ in qualunque punto z nel quale $\varphi(z)$ soddisfi alla condizione A; e, inoltre, aggiungiamo, essa converge uniformemente in qualunque segmento nel quale la condizione A sia soddisfatta uniformemente.

* * *

Nel caso particolare che $\varphi(z)$ sia analitica e regolare in tutto l'asse reale, incluso il punto $z = \infty$, la serie converge in una regione a due dimensioni, che contiene l'asse reale internamente: questa regione è limitata da due circoli, che è facile determinare.

Nel caso invece che $\varphi(z)$ sia non analitica, la convergenza è limitata all'asse reale; ma la serie può decomporsi in due

$$\varphi_1(z) = \sum_{-\infty} A_n \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n; \qquad \varphi_2(z) = \sum^{+\infty} A_n \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n$$

ciascuna delle quali converge e rappresenta una funzione analitica, regolare rispettivamente in uno dei due semipiani in cui l' asse reale divide il piano z.

* * *

Esempio di applicazione ad un caso non analitico: — Sviluppare la funzione

$$\varphi(z) = \begin{cases} = 0 \text{ per } z < 0 \\ = \frac{1}{2} \text{ per } z = 0 \\ = 1 \text{ per } z > 0 \end{cases} \tag{9}$$

cioè la funzione che in altre mie ricerche ho chiamato $1(z)$ e che ha tanta importanza nei calcoli di telegrafia.

Si ottiene:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi i} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{2n+1} \tag{10}$$

e di qui si possono dedurre varie rappresentazioni interessanti delle funzioni impulsive e delle funzioni di propagazione degli impulsi e dei fenomeni transienti nelle linee elettriche.

Se si vuole infine generalizzare la (7) per rappresentare funzioni che per $z = \pm \infty$ crescono in guisa tale che gli integrali (6) non convergano, basta porre come fattore comune una funzione che abbia crescenza più rapida di quella della funzione che si vuole rappresentare.

Per esempio, la serie modificata

$$\varphi(z) = \text{Ch.}\, z \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n$$

può rappresentare qualunque funzione che soddisfi alle condizioni già elencate pel comportamento al finito, e la sua crescenza per $z = -\infty$, $z = +\infty$ non sia più rapida di quella delle funzioni esponenziali e^{-z}, e^{+z}, rispettivamente; così, tutte le funzioni algebriche prive di poli nella porzione al finito dell' asse reale.

* * *

In quanto ad applicazioni analitiche, credo opportuno richiamare l' attenzione sull' utilità che la serie (7) potrebbe avere per lo studio delle soluzioni analitiche delle equazioni differenziali, e specialmente per investigare il loro comportamento nel punto $z = \infty$ (problemi di meccanica celeste).