
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ENRICO BOMPIANI

Postilla sull'equazione di Laplace

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 6 (1927), n.2, p. 61–63.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_2_61_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_2_61_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1927.

Postilla sull'equazione di Laplace.

Nota di E. BOMPIANI (a Bologna).

Le due Note precedenti ⁽¹⁾ mi danno occasione di richiamare alcuni miei risultati recenti ⁽²⁾ fra i quali trovasi l'interpretazione geometrica delle *forme associate* all'equazione di LAPLACE

$$(1) \quad x_{uv} + ax_u + bx_v + cx = 0.$$

1. Chiamo così le forme (2) $hdudv$, $kdudv$ invarianti per trasformazioni del tipo $x = \lambda(u, v)x'$, $u = \varphi(u')$ $v = \psi(v')$, essendo h e k i soliti invarianti (relativi) di DARBOUX.

È importante osservare che: *Le forme (2) determinano completamente la (1) di cui forniscono una rappresentazione invariante* ⁽³⁾.

Se P è un punto (di coordinate x^i , $i = 1, \dots, n+1$ con n arbitrario) di una superficie Φ integrale della (1), e P^1 ($x_v + ax$) è il corrispondente sulla trasformata di LAPLACE Φ^1 di Φ la retta PP^1 tocca in P^1 una linea u ($dv = 0$) di Φ^1 il cui piano osculatore in P^1 è il piano π tangente in P a Φ . Sia Γ^1 una linea di questo piano osculatrice in P^1 alla u (e del resto arbitraria) e t una tangente in P a Φ (definita da du/dv). Sia r una retta di π per P^1 , che faremo poi variare tendendo alla P^1P , e sia M un

⁽¹⁾ A. TERRACINI: *Un'osservazione sugli invarianti di un'equazione di Laplace*; G. FUBINI: *Una osservazione a proposito della nota precedente*; in questo numero del Bollettino.

⁽²⁾ E. BOMPIANI: *Ricerche analitiche e geometriche sull'equazione di Laplace* (Rend. Lincei, 2 gennaio 1927); *Sulla geometria dell'equazione di Laplace* (ibid., 6 febbraio 1927); le citerò con I e II.

⁽³⁾ L'invarianza delle (2), se pure non esplicitamente rilevata, si trova in DARBOUX (*Th. des surfaces*, t. II, cap. II) e, per un sistema coniugato appartenente ad una superficie di S_3 , s'incontra in FUBINI (*Geom. proiett. differ.*, t. I, p. 104). Ma ciò che realmente importa è l'equivalenza fra (1) e (2) perchè queste forniscono un modello invariante della (1) che è invece alterata dalle trasformazioni dette.

Se si scambiano fra loro le due forme si passa dalla (1) alla sua aggiunta e così riesce chiara l'equivalenza dei problemi d'integrazione di queste due equazioni.

punto in cui r incontra Γ^1 prossimo a P^1 (cioè tendente a P^1 quando $r \rightarrow P^1P$).

Il birapporto dei punti d' intersezione di r con le tangenti coniugate in P e con t e di M ha per termine principale, quando $r \rightarrow P^1P$, $\frac{1}{2} hdu dv$ ⁽¹⁾.

Poichè $\frac{1}{2} kdu dv$ si ricava in modo analogo si ha « un nuovo significato dell'invariante assoluto h/x e una nuova dimostrazione del teorema di KOENIGS » (I, 2).

2. Dall'equivalenza della (1) con la coppia di forme associate ho dedotto (I, n. 5), quasi senza calcoli, le forme canoniche delle (1) che ammettono trasformazioni infinitesime in sè: per avere un'idea della semplificazione apportata il lettore che ne abbia interesse può confrontare questa deduzione con quella originale del LIE (Werke, Bd. III, p. 492).

3. Il problema più interessante, una volta in possesso delle forme associate, era di studiarne le estremali: delle quali ho dimostrato che (I, n. 3) formano un *sistema planare o 2-assiale* (i piani osculatori ad esse in un punto P tagliano secondo rette un piano per P); ne ho data una costruzione geometrica (II, 3-5) affatto indipendente dal problema di variazione, servendomi delle coniche di KOENIGS; e me ne son servito per assegnare un riferimento invariante normale (piramide fondamentale e punto unità) entro lo S_4 2-osculatore (cioè contenente l'intorno del 2° ordine) in P a Φ (II, 6, 7).

Gli sviluppi necessari ed altri risultati ho esposto nel mio corso di Geometria Superiore, a cominciare dal dicembre 1926; essi troveranno posto in un lavoro più ampio (II, 1).

4. Un altro risultato, pure esposto in quel corso, si riferisce alla geometria proiettivo-differenziale di una superficie σ nello spazio ordinario S_3 .

(1) Può forse sorprendere che in quest'enunciato figurino la curva Γ^1 in gran parte arbitraria e la tangente du/dv , che non figurano nella costruzione del TERRACINI: ciò ha lo scopo di definire esattamente il procedimento di passaggio al limite che porta ad $hdu dv$ e di mettere in chiaro la dipendenza del valore di questa forma dalla tangente du/dv . Un enunciato apparentemente più semplice ma meno corretto si otterrebbe servendosi di punti « infinitamente vicini ».

Se si rappresentano le due congruenze di tangenti asintotiche di σ sulla quadrica di S_3 immagine delle rette di S_3 , si hanno due superficie come Φ e Φ^1 (con un doppio sistema coniugato, una trf. di LAPLACE dell'altra), in altri termini, e senza uscire da S_3 , le coordinate plückeriane di quei sistemi di rette soddisfano a due equazioni di LAPLACE, ciascuna trf. dell'altra.

Precisamente se le x^i dei punti di σ soddisfano il sistema

$$\begin{cases} x_{uu} + a x_u + b x_v + c x = 0 \\ x_{vv} + a' x_u + b' x_v + c' x = 0 \end{cases}$$

le coordinate $p^{ik} = x^i x_u^k - x^k x_u^i$ e le $q^{ik} = x^i x_v^k - x^k x_v^i$ soddisfano a due equazioni aventi in comune la forma associata $a' b' d u d v$.

La forma associata comune a queste due equazioni è la forma quadratica normale di Fubini $\beta \gamma d u d v$, invariante per applicabilità proiettive. Questo modo di giungervi, affatto indipendente da preventive normalizzazioni delle coordinate di σ e che nello stesso tempo ne dà un significato geometrico, è certo il più semplice che fino ad oggi si conosca.

Le due altre forme associate, pure invarianti per applicabilità proiettiva, sono $\left(\beta \gamma + \frac{\partial^2 \log \beta}{\partial u \partial v} \right) d u d v$ e $\left(\beta \gamma + \frac{\partial^2 \log \gamma}{\partial u \partial v} \right) d u d v$.