Bollettino Unione Matematica Italiana

Alessandro Terracini

Un'osservazione sugli invarianti di un'equazione di Laplace

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (1927), n.2, p. 57–60.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_2_57_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1927.

Un' osservazione sugli invarianti di un' equazione di Laplace.

Nota di ALESSANDRO TERRACINI (a Torino).

1. Non mi consta ([1]) che sia già stato osservato il seguente semplicissimo significato geometrico per gli invarianti h e k dell' equazione di LAPLACE

$$x_{uv} + a x_u + b x_v + c x = 0. \tag{1}$$

Sia (x) una superficie integrale della (1), e (x_1) una delle due sue trasformate di LAPLACE, con $x_1 = x_v + ax$. Detti $y = x + x_u du$ e $z = x + x_v dv$ i punti della (x) infinitamente vicini (del 1° ordine) a x, rispettivamente sulle linee u e v, y_1 e z_1 i loro corrispondenti sulla (x_1), la retta tangente in y alla linea v che vi passa contiene della (x_1) il punto

$$y_1 = x_v + ax + \frac{\partial}{\partial u}(x_v + ax)du = (1 - b du)x_v + (a + (a_u - c)du)x.$$

Il birapporto dei quattro punti allineati x, x_1, z, y_1 vale

$$\left(0,\ \frac{1}{a},\ dv,\ \frac{1 - b du}{a + (a_u - c)du}\right),$$

cioè, nel suo termine principale,

$$(a_u + ab - c)du dv = h du dv.$$

([1]) Dopo corrette le bozze vengo a conoscenza delle due Note di E. BOMPIANI: *Ricerche analitiche e geometriche sull' equazione di Laplace; Sulla geometria dell' equazione di Laplace.* (Rend. Acc. dei Lincei, gennaio-febbraio 1927); in esse si trova un' altra interpretazione per $hdudv$ e $kdudv$.

Ecco dunque il significato geometrico cercato: ***hdudv* è il birapporto** (in ordine opportuno) ***delle due coppie di punti infinitamente vicini che una tangente comune a una superficie integrale della*** (1) ***e alla sua trasformata di Laplace nel senso delle linee*** v ***ha rispettivamente in comune con le due superficie*** (1). Analogamente per $kdudv$, considerando la trasformata di LAPLACE (x_{-1}) nel senso nelle linee u (2).

2. Dalla precedente interpretazione discende una nuova caratterizzazione, pure molto semplice, delle congruenze W: ***affinchè una congruenza,*** a falde focali non degeneri, ***sia una congruenza*** W, ***è necessario e sufficiente che, considerando ogni raggio della congruenza da un lato come avente in comune rispettivamente con ciascuna delle due falde focali una coppia di punti infinitamente vicini*** (x, z; x_1, y_1), ***e da un altro lato come intersezione di due piani tangenti infinitamente vicini di ciascuna falda*** (piani tangenti in x, y; x_1, z_1), ***i birapporti delle due quaterne di punti e rispettivamente di piani così considerate*** (p. es. nell'ordine indicato) ***risultino uguali fra loro.*** Ciò si giustifica avendo riguardo all'equazione di LAPLACE — con le medesime caratteristiche della (1) — rappresentata dalla (x) in coordinate di piano tangente, per i cui invarianti, H e K, sussiste, naturalmente, la interpretazione geometrica duale di quella sopra assegnata per gli invarianti puntuali, e ricordando (cfr. p. es. FUBINI e CECH: *Geometria proiettiva differenziale*, t. I, p. 107) che condizione necessaria e sufficiente perchè la congruenza delle rette xx_1 sia una congruenza W è l'uguaglianza $h = K$.

3. Anche il teorema di KOENIGS sulle equazioni a invarianti uguali si giustifica in modo intuitivo e pressochè immediato in base al n. 1 (3). Invero, se $h = k$, la quaterna x, z, x_1, y_1, risulta

(1) L'interpretazione trovata si può anche enunciare così: siano $\bar{x}$, x_1 ulteriori punti delle linee risp. v e u risp. di (x) e di (x_1) uscenti da x, x_1; e sia, nello S_n ambiente, r uno S_{n-2} arbitrario ma generico: il termine principale del birapporto $r(x, x_1, \bar{x}, x_1)$ è indipendente da r e vale $hdudv$.

(2) L'osservazione del testo dà ragione *a priori* del fatto che il primo invariante della (1) e il secondo della sua trasformata di LAPLACE in x_1 risultano fra loro eguali.

(3) Cfr., per il caso del piano, G. KOENIGS: *Sur les réseaux plans à invariants égaux*, Comptes Rendus, t. CXIV, 1892; per il caso generale il n. 878 del t. IV delle *Leçons sur la théorie générale des surfaces* del DARBOUX (dimostrazione di natura metrica) e le dimostrazioni proiettive

proiettiva alla x, y, x_{-1}, z_{-1}, e perciò anche alla x_{-1}, z_{-1}, x, y. Esiste pertanto una conica tangente in x_1 alla retta xx_1, e tangente ulteriormente alla yy_1; tangente in x_{-1} alla retta xx_{-1}, e tangente infine alla zz_{-1}. La detta conica è dunque osculatrice rispettivamente in x_1 e in x_{-1} alle linee risp. u e v delle superficie (x_1) e (x_{-1}) che vi passano. E siccome il ragionamento è invertibile, il teorema di KOENIGS, secondo il quale l'uguaglianza degli invarianti h e k viene appunto caratterizzata dall'esistenza di una conica nelle condizioni testè descritte, si trova dimostrato.

4. Si può anche dedurre dallo stesso principio un risultato più generale da poco segnalato da E. BOMPIANI (¹), secondo il quale h/k è l'invariante di SEGRE — relativo ad uno qualsiasi dei due punti di contatto — delle coniche fra loro bitangenti N e M, definite dall'essere M (risp. N) osculatrice in x_1 (in x_{-1}) alla linea u di (x_1) (linea v di (x_{-1})) e tangente in x_{-1} (in x_1) alla linea v di (x_{-1}) (linea u di (x_1)). L'invariante di SEGRE cui qui si accenna, per due curve γ e γ' di uno stesso piano tangenti fra loro in un punto P — con retta tangente p — è il limite del birapporto $(OTM'M)$ — dove M, M' e T sono le intersezioni (prossime a P) di una trasversale, condotta per un punto generico O, rispettivamente con γ, γ', P — quando T tende a P (²): naturalmente, si può definire in modo analogo l'invariante duale, il calcolo effettivo del quale mostra che esso è l'inverso aritmetico del precedente (³).

Per la dimostrazione, basta osservare che, costruito sulla retta xx_1 un punto m tale che la quaterna x; z, x_1, m sia proiet-

di E. BOMPIANI: *Risoluzione geometrica del problema di Moutard...*, Rend. Lincei (5), t. XXIV, 1915, e di G. TZITZEICA: *Géométrie différentielle projective des réseaux*, Bucarest, 1924 (dimostrazione già annunciata dallo stesso A. in un precedente lavoro).

(¹) *La Geometria delle superficie considerate nello spazio rigato*, Rend. della R. Acc. dei Lincei (6) III, 1926. La dimostrazione cui il Bompiani accenna senza svilupparla riposa come egli dice sugli stessi calcoli con cui egli aveva dimostrato il teorema di Koenigs.

(²) Cfr. SEGRE: *Su alcuni punti singolari delle curve algebriche e sulla linea parabolica di una superficie*, Rend. della R. Acc. dei Lincei (5) VI, 1897; v. anche BOMPIANI: *Invarianti proiettivi di contatto fra curve piane*, ibid, (6) III, 1926.

(³) Questa relazione fra i due invarianti duali si trova segnalata in una postilla, aggiunta di mano del Segre, a una copia, già in suo possesso, della sua Nota citata nella nota precedente, copia che trovasi attualmente presso il prof. E. G. Togliatti.

tiva alla x, y, x_{-1}, z_{-1} e perciò alla x_{-1}, z_{-1}, x, y, la retta ym risulta tangente alla conica inviluppo generata congiungendo punti omologhi della prima e terza fra le nominale quaterne proiettive, vale a dire alla conica N, mentre le rette yy_1 e yx_1 appaiono rispettivamente come retta tangente condotta da y alla M, e retta che congiunge y al punto di contatto x_1 delle due coniche M e N ivi tangenti. Considerando pertanto la retta yx come retta generica per y e segando i quattro raggi del fascio y con la retta xx_1, ne viene, per l'invariante tangenziale di SEGRE delle coniche M e N, nell'ordine, il birapporto $(xx_1\, my_1)$, vale a dire — sostituendo a ogni punto della retta xx_1 il birapporto cui esso dà luogo dopo x, x_1, z — il birapporto $(\infty, 0, kdudv, hdudv) = h/k$; cosicchè ne risulta il medesimo valore per l'invariante puntuale delle due coniche, prese nell'ordine N, M.

Torino, 20 febbraio 1927.