UMI

Recensioni

* G. Burali-Forti: Geometria analitico-proiettiva, R. Lagrange: Calcul différentiel absolu
* Giulio Bisconcini: Esercizi e complementi di meccanica razionale

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (1927), n.2, p. 100–105.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_2_100_0>

RECENSIONI

C. BURALI-FORTI: *Geometria analitico-proiettiva* (2ª ed. IX+290) ed. G. B. Petrini, Torino, 1926.

Il calcolo vettoriale, com'è usato specialmente dagli autori italiani (e non nella maniera di alcuni autori stranieri, ai quali il calcolo vettoriale non serve che come tachigrafo di quello cartesiano), non ha pretesa di essere più potente strumento analitico dell'ordinario calcolo cartesiano, ma, oltre al gran pregio di facilitare allo studioso l'economia del pensiero, permette di ottenere i medesimi risultati con rapide considerazioni sintetiche e con rapidi sviluppi analitici, di collegare insieme questioni che sembrano a primo aspetto assai disparate, e di eliminare certi problemi fittizi che nascono dall'uso di particolari coordinate: alle quali poi, del resto, è agevole ricorrere, quante volte la natura della questione lo richieda.

Il libro suindicato che il prof. C. BURALI-FORTI presenta al pubblico matematico nella 2ª edizione, dà una prova convincente di quanto abbiamo ora affermato. Ivi sono trattate in maniera agile ed elegante, non soltanto le ordinarie geometrie analitica e proiettiva che formano oggetto di studio nel primo corso delle nostre Università, con varie deduzioni intorno a parecchie curve algebriche e trascendenti, ma vi figura anche buona parte delle applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale; soggetto, questo, che trova posto per lo più nei trattati di calcolo. E tutta questa materia è svolta in sole 255 pagine, con gran copia di esercizi; e non sono nemmeno dimenticate le traduzioni cartesiane o polari delle formule vettoriali, onde mostrarle nella forma degli ordinari trattati.

Per la lettura di questo libro occorre famigliarizzarsi bene con poche nozioni di calcolo geometrico del GRASSMANN; calcolo che, come viene messo in luce dal testo in esame, può trarre le sue basi dalle più elementari nozioni di geometria, ed ha un algoritmo assai simile a quello ben noto dei polinomi dell'algebra.

Una volta penetrato nello spirito di questo calcolo, il lettore rimarrà soddisfatto a vedere con quanta facilità e rapidità si risolvono le questioni di geometria metrica o proiettiva, finita o infinitesimale.

Diremo ora brevemente delle variazioni portate in questa nuova edizione, che sono però ritocchi non d'insieme, ma di particolari. È stata sostituita la definizione per astrazione delle « formazioni geometriche » con una definizione nominale, più chiara ed esatta; è stato messo in maggior rilievo, ma poco usato, il segno di operazione \ (prodotto esterno o vettoriale) avente per risultato l'indice del prodotto alternato di due vettori (di questo prodotto vettoriale l'A. non fa uso sistematico, non avendone la necessità). Molti numeri contengono maggiori sviluppi, per far risaltare altre proprietà di curve o per studiarne di nuove.

Alcune dimostrazioni, specialmente nella geometria proiettiva, sono state sostituite da altre più snelle; e, per terminare, diremo che, in particolare, l'A. ha trasformato radicalmente i numeri che riguardano la costruzione grafica dei tipi di coniche date mediante le equazioni cartesiane ed ha dato maggior sviluppo allo studio delle evolventi e delle superficie rigate.

Alla fine del libro sono proposti 312 esercizì di geometria analitica e di geometria proiettiva. *m.*

R. Lagrange: *Calcul différentiel absolu* (nella collezione: Mémorial des Sciences Mathém., Gauthier-Villars, 1926, pag. 37).

La breve esposizione che l'A. fa, in questo volumetto, degli elementi del Calcolo differenziale assoluto, inteso in un senso generale, contiene alcune novità di trattazione; novità, almeno, per chi non sia al corrente delle idee e dei procedimenti che l'A. ha introdotto e sviluppato nella sua *Tesi* [1] e nei lavori successivi. Perciò credo che possa riuscir utile darne un cenno.

L'opera è di carattere prevalentemente analitico, come avverte l'A. nella prefazione: però non vi mancano accenni ad alcune di quelle illustrazioni ed applicazioni geometriche che sole possono far comprendere realmente il significato e la portata dei metodi di calcolo assoluto. L'esposizione è fatta con notevole chiarezza e semplicità, nonostante il punto di vista assai generale da cui l'A. si pone.

(1) R. Lagrange: *Sur les calcul différentiel absolu*. (Ann. Fac. Sciences Toulouse, 3e sér., t. XIV, 1922, pag. 1-69).

Verrò a dare un sommario degli argomenti trattati, fermandomi soltanto a illustrare i punti che presentano un particolare interesse.

Nel Cap. I (*Calcolo tensoriale*) è rapidamente svolta la *parte algebrica* del Calcolo.

Nel Cap. II (*Principi del Calcolo differenziale assoluto*) l'A. introduce il concetto di differenziazione (e derivazione) tensoriale (lineare) (¹), restando nelle ipotesi più generali.

L'A. prende occasione dalla ricerca delle condizioni necessarie e sufficienti perchè il differenziale tensoriale $\bar{d}X$ di un censore X sia omogeneo al tensore stesso per introdurre una nozione veramente interessante e feconda, specialmente nell'applicazione allo studio delle varietà subordinate: quella di differenziale tensoriale di un tensore, le cui componenti portino *indici di due specie diverse*, cioè, che *dipendano da due diverse serie di variabili* (²).

Il Cap. III (*Calcolo differenziale assoluto delle varietà riemanniane*) è dedicato al Calcolo assoluto *rispetto a una forma differenziale quadratica*, secondo Ricci e Christoffel. L'A. si ferma specialmente sul tensore di Riemann-Christoffel, che introduce per via analitica. A proposito, è da notare che, con le notazioni usate dall'A., tale tensore γ^k_{ihl} si esprime *come differenza di due derivate covarianti di quantità non tensoriali*, le « rotazioni » γ^k_{ih}.

Non so però se le semplificazioni che così si ottengono nelle formule compensino la mancanza d'uniformità, e il pericolo insito nell'uso di operazioni, appropriate soltanto pei tensori, per grandezze non tensoriali.

Cap. IV. (*Calcolo pfaffiano assoluto*). La generalizzazione del Calcolo differenziale assoluto, di cui tratta sommariamente questo Capitolo, è dovuta allo stesso Lagrange: e costituisce l'idea fondamentale a cui si ispira la sua Tesi, e il mezzo di cui egli si vale costantemente nelle sue ricerche.

Il Lagrange parte dall'osservazione che le proprietà formali del Calcolo differenziale assoluto *non dipendono dall'ipotesi che le* dx^λ *siano differenziali esatti*. Risulta dunque possibile porre, al luogo delle dx^λ, *n pfaffiani* (indipendenti) $d\omega^i$, cioè, *n* forme differenziali lineari, che non saranno di necessità differenziali esatti: e costruire così un calcolo assoluto del tutto analogo a quello ordinario, ma un po' più generale: il *calcolo pfaffiano assoluto*,

(¹) *Ueberschiebungsinvariant lineare Uebertragung*, secondo Schouten.

(²) V. la mia Nota: *Spazi subordinati, equazioni di Gauss e Codazzi*, in corso di stampa in questo « Bollettino ».

secondo LAGRANGE. Qui l'idea di cambiamento di variabili è sostituita dall'idea più generale di ***sostituzione lineare*** effettuata sugli n ***pfaffiani di base***, $d\omega^i$. ***Geometricamente***, ciò equivale a riferire i tensori applicati ai punti di una varietà, anzichè a un sistema di coordinate curvilinee, a un n-edro variabile da punto a punto in modo qualunque, o anche, ad un' n-pla ***di congruenze*** (qualunque).

Posto $d\omega^i = \theta^i_\lambda dx^\lambda$, onde $dx^\lambda = \theta^\lambda_i d\omega^i$ (ove θ^λ_i è l'elemento reciproco di θ^i_λ nel determinante delle θ^i_λ) il LAGRANGE indica con $\frac{\partial f}{\partial \omega_i}$ il coefficiente di $d\omega^i$ nell'espressione di df, e usa sistematicamente le *derivate rispetto alle* ω^i, così introdotte, al luogo delle derivate ordinarie. Analogamente, al luogo delle componenti ordinarie di un vettore covariante o controvariante, ξ_λ o ξ^μ, sostituisce le $\xi_i = \theta^\lambda_i \xi_\lambda$, $\xi^k = \theta^k_\mu \xi^\mu$: e così per tensori qualunque.

Ciò posto: nel *calcolo pfaffiano generale*, secondo LAGRANGE, si definisce ad es. la derivata covariante $\frac{\bar\partial \xi_i}{\partial \omega^r}$ ponendo

$$\frac{\bar\partial \xi_i}{\partial \omega^r} = \frac{\partial \xi_i}{\partial \omega^r} - \gamma^s_{ir} \xi_s$$

ove le γ^s_{ir} sono funzioni arbitrarie delle x^λ, a cui si impone soltanto di trasformarsi, in un mutamento lineare delle $d\omega^i$, secondo certe formule, che generalizzano quelle di CHRISTOFFEL. Le componenti ξ_i, ξ^k,... e le derivate, sia ordinarie che covarianti

$$\frac{\partial f}{\partial \omega^i}, \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial \omega^r}, \quad \frac{\bar\partial \xi_i}{\partial \omega^r}, \ldots$$

sono ***invarianti*** per ogni trasformazione sulle x^λ, quanto resti invariato il sistema dei pfaffiani $d\omega^i$ di base: le $\frac{\partial f}{\partial \omega_i}$, ξ_i, $\frac{\bar\partial \xi_i}{\partial \omega^r}, \ldots,$ $(\xi^k, \ldots)$ sono poi *covarianti* (*controvarianti*) rispetto ad ogni trasformazione lineare dei pfaffiani stessi.

Vi è un tipo particolare di derivate pfaffiane covarianti, definite *intrinsecamente* dall'assegnazione dei pfaffiani di base: quello in cui le γ^i_{sr} sono i *coefficienti di rotazione* γ_{sir}, secondo RICCI, dell' n-pla θ^i_λ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, nella metrica d'elemento lineare $ds^2 = \Sigma_i d\omega^{i^2}$. Allora, naturalmente, il gruppo delle trasformazioni lineari sulle $d\omega^i$, rispetto a cui si ha covarianza, non è il gruppo totale, ma il *sottogruppo ortogonale*, che lascia invariata $\Sigma_i d\omega^{i^2}$. Il calcolo pfaffiano assoluto si riduce così al noto *calcolo intrinseco* di RICCI e LEVI-CIVITA rispetto ad un'n-pla di conguenze ortogonali (1). È interessante osservare che si ha allora, per la *derivata covariante* di ξ_i rispetto ad ω^r,

$$\frac{\overline{\partial}\xi_i}{\partial\omega^r} = \theta_i^\lambda\theta_r^\mu\Delta_\lambda^0\xi_\mu, \tag{1}$$

mentre per quella *ordinaria* è

$$\frac{\partial\xi_i}{\partial\omega^r} = \theta_i^\lambda\theta_r^\mu\Delta_\lambda\xi_\mu, \tag{2}$$

ove $\Delta_\lambda^0\xi_\mu$ è la derivata covariante ordinaria, secondo RICCI, rispetto al ds^2 poco sopra detto: mentre $\Delta_\lambda\xi_\mu$ è quella particolare *derivata covariante rispetto all' n-pla* θ_λ^i, che è stata osservata dal WEITZENBÖCK e poi (indipendentemente da lui) dal VITALI, che ne ha dato il significato geometrico: della quale ho avuto occasione di occuparmi in recenti lavori (2). Le precedenti relazioni non sono date dal LAGRANGE, che però fa uso, implicitamente, della prima.

Il calcolo intrinseco di RICCI e LEVI-CIVITA, come osserva il LAGRANGE, è il più semplice in cui intervenga il sistema dei pfaffiani $d\omega^i$: « il joue, pour ce système, le même rôle que le calcul différentiel ordinaire pour les n différentielles exactes dx^i » (pag. 20).

È ben nota la semplicità e la fecondità di tale calcolo intrinseco nello studio delle varietà riemanniane. Il calcolo pfaffiano *generale* è invece strumento appropriato allo studio degli spazi a connessione affine. Appunto a questa applicazione è dedicato il Cap. V (*Varietà a connessione affine*), in cui l'A. dà una chiara esposizione delle vedute di CARTAN su questa nuova branca della Geometria, e di vari risultati, dovuti in gran parte allo stesso CARTAN.

Nell' ultimo Capitolo (*Calcolo differenziale assoluto di una varietà immersa in un' altra*) l' A. espone alcuni interessanti risultati delle sue ricerche sulle varietà subordinate.

ENEA BORTOLOTTI

(1) Cfr. CISOTTI, *Derivazione intrinseca nel calcolo differenziale assoluto.* (Rend. Lincei, ser. V, vol. 27, 1918, 1° sem., p. 387-391; 2° sem., p. 22-24).

(2) Vedi: *Parallelismi assoluti nelle V_n riemanniane.* Atti Ist. Veneto, t. 86, 1926-27, pag. 455-465; *On metric connexion with absolute parallelism,* Proceedings Kon. Akad. Wet. Amsterdam, 1927.

GIULIO BISCONCINI: *Esercizi e complementi di meccanica razionale.* Libreria Editrice Politecnica. Milano, 1927, pag. 480.

Tra i libri, di esercizi su la « Meccanica Razionale », questo del prof. BISCONCINI è, sotto molti aspetti, notevole. Il volume ha avuto origine dai corsi di esercitazioni svolti per più anni dall'A. nell'Università di Roma e contiene, oltre a problemi sulle teorie che di solito si espongono nei nostri corsi universitari (e che sono brevemente richiamate all'inizio di ogni capitolo), anche molti complementi diretti sia ad informare il lettore dei metodi e degli artificii più usati nelle applicazioni, sia ad indicare qualche ulteriore sviluppo della teoria. Così il primo capitolo, che contiene gli esercizi sul calcolo vettoriale, da una parte mostra le costruzioni e proprietà fondamentali relative ai poligoni funicolari, e dall'altra presenta alcune nozioni sulla teoria delle curve (formule di FRÉNET, cerchio e sfera osculatori etc.). Allo stesso criterio si ispirano tutti i capitoli seguenti, e per quanto non sia il caso di ricordare qui dettagliatamente il loro contenuto, dobbiamo rilevare lo studio dei vettori ruotanti (cap. II), molti esempi di cinematica delle macchine nei capitoli III e IV e nel capitolo V, che tratta delle unità, dimensioni e modelli meccanici, l'esposizione del metodo delle dimensioni zero e delle applicazioni, dovute al TOLMANN, del principio di similitudine. Anche gli esercizi sui baricentri (cap. VII) e sui momenti di inerzia (cap. VIII) sono scelti molto opportunamente, trattando figure usate nelle applicazioni, ed interessante è il capitolo IX che si riferisce all'attrazione newtoniana. Ricordiamo infine gli esercizi sulla stabilità dell'equilibrio (cap. X) e sui sistemi articolati (cap. XI); quelli sui regolatori (cap. XIII), sulle vibrazioni e sui fenomeni di risonanza (cap. XIV).

L'esposizione è dappertutto piana e precisa, sicchè il libro appare un degno complemento al classico trattato di LEVI-CIVITA ed AMALDI, al quale il BISCONCINI rimanda il lettore per molte dimostrazioni e sviluppi. G. S.