Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Giulio Bisconcini

Sulla funzione di sopravvivenza

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **6** (1927), n.1, p. 9–12.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_1_9_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1927.

Sulla funzione di sopravvivenza.

Nota di GIULIO BISCONCINI (a Roma).

1. La probabilità ${}_yp_x$ che un individuo di età x sopravviva all'età $x+y$ è una funzione $f(x, y)$ dei due argomenti positivi x, y la quale, qualunque sia x, è uguale all'unità, quando $y=0$, mentre per ogni altro valore, positivo, di y è minore di 1. Si hanno cioè le due condizioni

$$f(x, 0)=1, \tag{1}$$

$$f(x, y)<1. \tag{2}$$

Ammetteremo che $f(x, y)$ sia derivabile rispetto ad y e che tale derivata sia continua rispetto ad x.

Per il principio della probabilità composta, la probabilità ${}_{y+z}p_x$ che la testa (x) raggiunga l'età $x+y+z$ è prodotto della probabilità ${}_yp_x$ per la probabilità ${}_zp_{x+y}$ che la testa $x+y$ raggiunga l'età $x+y+z$. Si ha dunque

$$f(x, y+z)=f(x, y)f(x+y, z), \tag{3}$$

e non è inutile osservare che da questa, essendo, per la (2), $f(x+y, z)<1$, segue $f(x, y+z)<f(x, y)$ e cioè che $f(x, y)$ è,

funzione decrescente di y e quindi che

$$\frac{\partial f}{\partial y} \leqq 0. \tag{4}$$

2. Ci proponiamo di vedere quale possa essere, in base alla ipotesi fatta, la forma più generale di $f(x, y)$.

La relazione funzionale (3), ove si faccia $z = \Delta y$ e da ambo i membri si sottragga $f(x, y)$ si scrive

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = f(x, y) \{ f(x + y, \Delta y) - 1 \}.$$

Se, tenendo conto della (1), si mette $f(x + y, 0)$ in luogo dell'unità che comparisce nel secondo membro, quindi si divide per Δy e si passa al limite quando Δy tende a zero, per l'ammessa esistenza della derivata di $f(x, y)$ rispetto alla y, si ha:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f(x, y) \left\{ \left(\frac{\partial f(\xi, y)}{\partial y} \right)_{y=0} \right\}_{\xi = x+y}$$

o

$$\frac{\partial}{\partial y} lg f(x, y) = \left\{ \left(\frac{\partial f(\xi, y)}{\partial y} \right)_{y=0} \right\}_{\xi = x+y}. \tag{5}$$

Se poniamo

$$\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)_{y=0} = - \varphi(x), \tag{6}$$

$\varphi(x)$ essendo una funzione arbitraria, soggetta solo alla condizione di essere continua e non negativa, la (5) si scriverà

$$\frac{\partial}{\partial y} lg f(x, y) = - \varphi(x + y),$$

d'onde, tenendo conto della (1) e della integrabilità della φ, si trae

$$lg f(x, y) = - \int_0^y \varphi(x + \lambda) d\lambda,$$

e, posto $x + \lambda = t$,

$$lg f(x, y) = - \int_x^{x+y} \varphi(t) dt$$

e infine

$$f(x, y) = e^{-\int_x^{x+y} \varphi(t) dt}. \tag{7}$$

Di quà, si deduce

$$
\begin{aligned}
f(x,\ y+z) &= e^{-\int_x^{x+y+z}\varphi(t)dt} \\
&= e^{-\int_x^{x+y}\varphi(t)dt}\ e^{-\int_{x+y}^{x+y+z}\varphi(t)dt} \\
&= f(x,\ y) f(x+y,\ z)
\end{aligned}
$$

il che prova che l'equazione funzionale (3) è verificata, e che la (6) ne è quindi la soluzione più generale.

3. Se $\mu(t)$ è il *tasso istantaneo* di mortalità relativo all'età t per gli individui di una collettività e indichiamo con $l(t)$ il numero degli individui di età t esposti a morte di un gruppo iniziale $l(0)$ per eliminazione dovuta solo alla morte, sarà $l(t)\mu(t)dt$ il numero dei morti del gruppo $l(t)$ nell'intervallo $t \vdash\!\dashv t+dt$, e

$$\int_x^{x+y} l(t)\mu(t)dt$$

il numero dei morti nel periodo $x \vdash\!\dashv x+y$.

Ne risulta che il numero $l(x+y)$ dei sopravviventi all'età $x+y$ è

$$l(x+y) = l(x) - \int_x^{x+y} l(t)\mu(t)dt. \tag{8}$$

Orbene, se, come probabilità che una testa (x) sopravviva all'età $x+y$, si assume il rapporto $l(x+y)/l(x)$, la (7) può mettersi sotto la forma

$$\frac{l(x+y)}{l(x)} = e^{-\int_x^{x+y}\varphi(t)dt} \tag{7'}$$

da cui si trae, per derivazione logaritmica rispetto a y e per l'ammessa continuità di $\varphi(x)$

$$\frac{1}{l(x+y)}\ \frac{\partial l(x+y)}{\partial y} = -\ \varphi(x+y),$$

e, per integrazione fra 0 e y,

$$l(x+y) = l(x) = -\int_0^y l(x+y)\varphi(x+y)dy$$

che si può pure scrivere

$$l(x+y)=l(x)-\int_{x}^{x+y} l(t)\varphi(t)dt.$$

Il confronto con la (8) permette di identificare la funzione $\varphi(x)$ introdotta mediante la (6) col tasso istantaneo di mortalità.

In particolare, assumendo

$$\varphi(x)=a+bc^{x},$$

si trova, a norma della (7′), la nota legge di sopravvivenza di MAKEHAM espressa da $l(x)=ks^{x}g^{c^{x}}$ in cui

$$s=e^{-a},\quad g=e^{-b/lgc},\quad k=l(0)/g.$$

Roma, dicembre 1926.