Gaetano Scorza

A proposito di un teorema del Chapman

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (1927), n.1, p. 1–6.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_1_1_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1927.

PICCOLE NOTE

A proposito di un teorema del Chapman.

Nota di GAETANO SCORZA (a Napoli).

In una sua breve Nota inserita nel *Messenger of Mathematics* (vol. 42, 1913, pag. 132) il CHAPMAN ha dimostrato che, se G è un gruppo d'ordine finito ed H è un suo sottogruppo di indice r, è possibile determinare in G r elementi $g_1, \ldots, g_r$, sì che risulti nel tempo stesso

$$G = Hg_1 + \ldots + Hg_r \quad \text{e} \quad G = g_1H + \ldots + g_rH.$$

Il ragionamento del CHAPMAN, che procede per assurdo, non pone affatto in evidenza la ragione intima di codesto notevole teorema; nè, per questo riguardo, è da considerarsi come più soddisfacente la dimostrazione che ne dà il MILLER a pag. 83 del trattato sulla teoria dei gruppi finiti composto in collaborazione col BLICHFELDT e col DICKSON, nella quale si fa ricorso alla teoria della rappresentazione dei gruppi astratti mediante gruppi transitivi di sostituzioni.

Oltre di che nè il procedimento del CHAPMAN, nè quello del MILLER si prestano alla determinazione del numero dei sistemi di r elementi ciascuno, per ognuno dei quali vale la proprietà sopra enunciata.

Orbene, oggetto di questa Nota è far vedere come le proprietà della distribuzione degli elementi di un gruppo in sistemi laterali, sinistri o destri, rispetto a un sottogruppo, o in sistemi bilaterali rispetto a una coppia ordinata di sottogruppi, e alcune osservazioni su tale argomento (vedi più innanzi i n.[i] 3 e 4) che, a quanto pare, non sono state ancora poste esplicitamente in rilievo, permettono non solo di mostrare in maniera semplice e spontanea, con notevole generalizzazione del teorema del CHAPMAN, che:

Se G è un gruppo d'ordine finito ed H, K sono suoi sottogruppi di indice r, è possibile determinare in G r elementi $g_1, \ldots, g_r$, sì che *risulti nel tempo stesso*

$$G = Hg_1 + \dots + Hg_r \quad e \quad G = g_1K + \dots + g_rK:$$

ma anche di computare in quante maniere diverse la determinazione di r elementi sì fatti possa essere adempiuta.

1. Se G è un gruppo (d'ordine finito, o non) ed H un suo sottogruppo, un sistema ***laterale sinistro (destro)*** di G ***rispetto*** ad H è l'insieme degli elementi di un prodotto del tipo gH (del tipo Hg), con g elemento di G.

Ciascuno dei sistemi gH e Hg contiene g, una volta che H contiene l'elemento identico; e se $g'H$ e Hg'', con g' e g'' elementi di G, contengono g, è $g = g'h'$ e $g = h''g''$, con h' e h'' elementi opportuni di H, indi

$$g'H = gh'^{-1} \cdot H = g \cdot h'^{-1}H = gH$$

e

$$Hg'' = H \cdot h''^{-1}g = Hh''^{-1} \cdot g = Hg;$$

dunque *ciascun elemento di G appartiene ad uno, ed uno solo, dei sistemi laterali sinistri (destri) di G rispetto ad H.*

2. Se H e K sono sottogruppi di G, un sistema ***bilaterale di G rispetto alla coppia ordinata*** (H, K) è l'insieme degli elementi di un prodotto del tipo HgK, con g elemento di G. Che se poi è $K = H$, un tale insieme dicesi più semplicemente un sistema ***bilaterale di G rispetto ad H.***

Giacchè H e K contengono l'elemento identico, HgK contiene g; e, se $Hg'K$, con g' elemento di G, contiene g, è $g = hg'k$, con h e k elementi opportuni di H e K rispettivamente, indi

$$Hg'K = H \cdot h^{-1}gk^{-1} \cdot K = Hh^{-1} \cdot g \cdot k^{-1}K = HgK;$$

dunque *ciascun elemento di G appartiene ad uno, e uno solo, dei sistemi bilaterali di G rispetto ad (H, K).*

Il sistema HgK contiene evidentemente Hg e gK; d'altronde, per quanto precede, g è, in sostanza, un qualsivoglia elemento di HgK, quindi *un sistema bilaterale di G rispetto ad (H, K) contiene ogni sistema laterale destro (sinistro) di G rispetto ad H (a K), che abbia in comune con esso un elemento.*

3. Sia adesso H_d un sistema laterale destro di G rispetto ad H e K_s un sistema laterale sinistro di G rispetto a K.

Se H_d e K_s hanno almeno un elemento comune, il sistema bilaterale di G rispetto ad (H, K), cui appartiene quell'elemento, contiene H_d e K_s.

Ebbene, suppongasi inversamente che H_d e K_s siano entrambi contenuti in un sistema bilaterale T di G rispetto ad (H, K); e sia g_1 un elemento di H_d, g_2 un elemento di K_s.

Sarà

$$H_d = Hg_1, \quad K_s = g_2K. \quad T = Hg_1K = Hg_2K$$

e sussisterà un'eguaglianza della forma

$$g_1 = hg_2k,$$

con h e k elementi opportuni di H e K rispettivamente.

Ma da questa discende

$$h^{-1}g_1 = g_2k,$$

e $h^{-1}g_1$ appartiene ad Hg_1, cioè ad H_d, g_2k appartiene a g_2K, cioè a K_s; dunque H_d e K_s hanno almeno un elemento comune.

Aggiungasi che, se g è un tale elemento, si ha

$$H_d = Hg, \quad K_s = gK$$

e quindi è (1)

$$\begin{aligned} H_d \cap K_s &= Hg \cap gK = gg^{-1}(Hg \cap gK) = \\ &= g(g^{-1}Hg \cap g^{-1}gK) = g(g^{-1}Hg \cap K); \end{aligned}$$

e analogamente

$$H_d \cap K_s = (Hg \cap gK)g^{-1}g = (H \cap gKg^{-1})g.$$

Si conclude che:

Un sistema laterale destro H_d di G rispetto ad H e un sistema laterale sinistro K_s di G rispetto a K hanno almeno un elemento comune quando, e solo quando, sono contenuti in un medesimo sistema bilaterale di G rispetto ad (H, K); e, in caso affermativo, detto g un tale elemento, si ha:

$$H_d \cap K_s = g(g^{-1}Hg \cap K) = (H \cap gKg^{-1})g.$$

4. Sia T un sistema bilaterale di G rispetto ad (H, K) e sia J_d (J_s) l'insieme dei sistemi laterali destri (sinistri) di G

(1) Se U e V sono sistemi di un gruppo, cioè insiemi di suoi elementi, con $U \cap V$ indichiamo l'*intersezione* di U e V, cioè l'insieme degli elementi comuni ad U e V.

rispetto ad H (a K) contenuti in T. Infine siano H_d e H_d' sistemi di J_d e K_s e K_s' sistemi di J_s.

Dico che:

Gli ordini dei sistemi $H_d \cap K_s$ e $H_d' \cap K_s'$ sono uguali (¹).

Infatti siano g, g' e g_1 elementi contenuti, rispettivamente, nei sistemi $H_d \cap K_s$, $H_d' \cap K_s'$ e $H_d \cap K_s'$.

Sarà

$$H_d = Hg = Hg_1, \quad K_s = gK,$$
$$H_d' = Hg', \qquad K_s' = g'K = g_1K,$$

e inoltre

$$g_1 = hg \quad \text{e} \quad g_1 = g'k,$$

con h elemento di H e k elemento di K; quindi si avrà

$$H_d \cap K_s' = g_1(g_1^{-1}Hg_1 \cap K) = hg(g^{-1} \cdot h^{-1}Hh \cdot g \cap K) =$$
$$= h \cdot g(g^{-1}Hg \cap K) = h(H_d \cap K_s)$$

e

$$H_d \cap K_s' = (H \cap g_1Kg_1^{-1})g_1 = (H \cap g' \cdot kKk^{-1} \cdot g'^{-1})g'h =$$
$$= (H \cap g'Kg'^{-1})g' \cdot h = (H_d' \cap K_s')k.$$

Ma allora l'ordine di $H_d \cap K_s'$ eguaglia tanto quello di $H_d \cap K_s$ quanto quello di $H_d' \cap K_s'$ e dunque questi ultimi due sono eguali.

L'intersezione di un sistema di J_d con un sistema di J_s si dirà un *nucleo* di T — rispetto ad (H, K) — e l'ordine comune dei nuclei di T si dirà la *valenza* di T — rispetto ad (H, K) —.

Riassumendo le considerazioni fatte si ha il seguente enunciato complessivo:

Un sistema bilaterale T di G rispetto ad (H, K) si può considerare e come una somma di sistemi laterali destri rispetto ad H e come una somma di sistemi laterali sinistri rispetto a K. Detto J_d l'insieme di quelli e J_s l'insieme di questi:

1°) *ciascun sistema di T appartiene ad uno, ed un solo, sistema di J_d e ad uno, ed un solo, sistema di J_s;*

2°) *ciascun sistema di J_d interseca ciascun sistema di J_s secondo un nucleo di T;*

3°) *i nuclei di T hanno tutti per ordine la valenza di T, e ciascun sistema di J_d e J_s è una somma di nuclei.*

(¹) Occorre appena avvertire che si può parlare di *ordine* di un gruppo o di un sistema, anche se l'insieme dei suoi elementi è infinito. Esso è, in ogni caso, la potenza di detto insieme.

5. Introducasi ora l'ipotesi che G sia di ordine finito, di guisa che tali saranno pure H e K, i sistemi laterali e bilaterali di G considerati, e i nuclei di questi ultimi.

Si indichino con μ, ν gli ordini di H, K rispettivamente; con T_1, T_2,..., T_l i sistemi bilaterali di G rispetto ad (H, K) e con q_j la valenza di T_j $(j = 1,..., l)$.

Un sistema laterale destro di G rispetto ad H contenuto in T_j è una somma di nuclei di T_j, a due a due privi di elementi comuni; d'altronde il suo ordine è μ, dunque μ è divisibile per q_j. Allo stesso modo si vede che ν è divisibile per q_j; ed è chiaro che, se si pone

$$\mu = \mu_j' q_j \quad \text{e} \quad \nu = \nu_j' q_j,$$

T_j conterrà μ_j' sistemi laterali sinistri di G rispetto a K e ν_j' sistemi laterali destri di G rispetto ad H; di guisa che l'ordine di T_j sarà

$$\nu\mu_j' = \mu\nu_j' = \frac{\mu\nu}{q_j},$$

e il numero dei nuclei di T_j sarà

$$\mu_j'\nu_j' = \frac{\mu\nu}{q_j}.$$

6. Si mantengano le ipotesi del n.° precedente e si supponga inoltre che gli indici H e K siano uguali, di guisa che sarà $\mu = \nu$ e $\mu_j' = \nu_j'$.

In T_j si avranno μ_j' sistemi laterali destri di G rispetto ad H e altrettanti sistemi laterali sinistri di G rispetto a K, e le intersezioni di quelli con questi saranno i $\mu_j'^2$ nuclei di T_j.

Segue che $g_{j,1}$,..., $g_{j,\mu_j'}$ saranno μ_j' elementi di T_j per i quali risulta nel tempo stesso,

$$T_j = Hg_{j,1} + \dots + Hg_{j,\mu_j'} \quad \text{e} \quad T_j = g_{j,1}K + \dots + g_{j,\mu_j'}K,$$

se, e soltanto se, essi si distribuiscono, uno per uno, in μ_j' nuclei di T_j, dei quali ne capiti uno — ed uno solo — in ciascuno dei μ_j' sistemi laterali destri rispetto ad H, e in ciascuno dei μ_j' sistemi laterali sinistri rispetto a K, contenuti in T_j.

Ora μ_j' nuclei di T_j soddisfacenti a tale condizione si possono determinare in $\mu_j'!$ modi differenti; e fissati μ_j' nuclei si fatti, per ciascun di essi un elemento può scegliersi in q_j modi diversi; dunque in T_j sistemi di μ_j' elementi ciascuno che si comportino nel modo or ora indicato ne esistono

$$\mu_j'!\, q_j^{\mu_j'}.$$

Da ciò segue subito il teorema più generale di quello del CHAPMAN enunciato nell'introduzione, e segue anche che il numero dei sistemi di elementi soddisfacenti alle condizioni da esso imposte è dato dal prodotto

$$\mu_1'!\,\mu_2'!\ldots\mu_l'!\,q_1^{\mu_1'}\,q_2^{\mu_2'}\ldots q_l^{\mu_l'}.$$

Morano Calabro, 13 agosto 1926.