UMI

Sunti di lavori italiani

* Lavori di: L. Tonelli, D. Montesano, M. Picone, E. Maccaferri, G. Usai

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (1927), n.1, p. 16–22.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_1_16_0>

SUNTI DI LAVORI ITALIANI

L. Tonelli: *Sulla convergenza delle serie doppie di Fourier*. (« Annali di Matematica pura e applicata », serie IV, tomo IV, 1926).

In questa Memoria l'A., sfruttando il concetto di funzione di due variabili *a variazione limitata*, da Lui posto recentemente [1], stabilisce un teorema di convergenza per le serie doppie di Fourier, che è la generalizzazione del noto teorema di Jordan sulle serie di Fourier delle funzioni di una sola variabile. Supposta la funzione $f(x, y)$ data in tutto il piano (x, y), periodica rispetto ad x e rispetto ad y, con periodo 2π, e integrabile, nel senso del Lebesgue, nel quadrato $Q \equiv [0 \leq x \leq 2\pi,\ 0 \leq y \leq 2\pi]$, e indicata con $V_{(x)}(x, y)$ la sua variazione totale, come funzione della sola x, nell'intervallo $(0, x)$, con $0 < x \leq 2\pi$, e con $V_{(y)}(x, y)$ l'analoga variazione totale rispetto ad y, e supponendo poi le $V_{(x)}(x, y)$ e $V_{(y)}(x, y)$ definite in tutto il piano (x, y) per mezzo della doppia periodicità, dimostra che:

Se la $f(x, y)$ è a variazione limitata in Q e se nel punto (x, y) valgono le quattro uguaglianze

$$\lim_{\substack{u \to +0 \\ v \to 0}} \left| V_{(x)}(x + u,\ y + v) - V_{(x)}(x + 0,\ y + v) \right| = 0,$$

$$\lim_{\substack{u \to +0 \\ v \to 0}} \left| V_{(x)}(x - u,\ y + v) - V_{(x)}(x - 0,\ y + v) \right| = 0,$$

$$\lim_{\substack{u \to 0 \\ v \to +0}} \left| V_{(y)}(x + u,\ y + v) - V_{(y)}(x + u,\ y + 0) \right| = 0,$$

$$\lim_{\substack{u \to 0 \\ v \to +0}} \left| V_{(y)}(x + u,\ y - v) - V_{(y)}(x + u,\ y - 0) \right| = 0,$$

in tale punto la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ converge verso il valore

$$(1) \qquad \frac{1}{4} \left\{ f(x + 0,\ y + 0) + f(x - 0,\ y + 0) + f(x - 0,\ y - 0) + f(x + 0,\ y - 0) \right\}.$$

[1] V. questo « Bollettino », anno V (1926), pag. 131.

Dà poi due proposizioni generali relative alla convergenza uniforme.

Da questi risultati vengono dedotti molti criteri di convergenza, fra i quali sono contenuti quasi tutti quelli fino ad ora conosciuti. Fra i nuovi criteri più notevoli vanno ricordati i due seguenti:

a) *Se la* $f(x, y)$, *limitata e integrabile, compie, come funzione della sola* x, *e così pure come funzione della sola* y, *un numero di oscillazioni sempre inferiore ad un numero fisso, e se, inoltre, in* (x, y) *esistono i quattro limiti* $f(x \pm 0, y \pm 0)$, *in tale punto la serie doppia di Fourier della* $f(x, y)$ *converge verso il valore* (1).

b) *Se la* $f(x, y)$ *è, come funzione della sola* x, *sempre assolutamente continua, ed è pure sempre assolutamente continua anche come funzione della sola* y, *e se, inoltre, esistono due numeri positivi* N *e* σ *tali che sia sempre*

$$\int_0^{2\pi} |f_x'|^{1+\sigma} dx < N, \quad \int_0^{2\pi} |f_y'|^{1+\sigma} dy < N,$$

la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ *converge ovunque uniformemente verso la* $f(x, y)$.

L'A. dà anche un criterio di convergenza, generalizzazione del noto criterio di LIPSCHITZ; e, in un ultimo Capitolo, studia la sommabilità della serie doppia di FOURIER per linee e per colonne, dimostrando che, in tutti i casi di convergenza da Lui considerati, la serie può comunque sommarsi per linee e per colonne, giungendo sempre allo stesso risultato.

D. MONTESANO: *Su la teoria generale delle corrispondenze birazionali fra i punti dello spazio.* (Atti della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, vol. XVII. serie 2ª, n. 6).

Nella presente Memoria, si considerano quelle corrispondenze birazionali K fra i punti degli spazi ordinari S, S', dette *regolari*, nelle quali le superficie di ciascuno dei due sistemi omaloidici Σ, Ξ', collegati alla trasformazione, non contengono tutte uno stesso intorno, piano o conico, di un punto fondamentale, nè uno stesso intorno piano di un punto appartenente a una linea fondamentale.

Si dicono *collegate* alla corrispondenza le superficie dei due sistemi Σ, Ξ' e le curve sezioni variabili di tali superficie, omologhe, nella K^{-1} o nella K, dei piani e delle rette dell'altro spazio.

Si dicono *fondamentali* per la corrispondenza K nello spazio S o S' i punti e le linee che formano i gruppi base

$$\Gamma \equiv 0_1, 0_2, \dots 0_{h-1}, 0_h, \dots 0_p \quad \text{e} \quad \Gamma' \equiv 0_1', 0_2', \dots 0'_{h'-1}, 0'_{h'}, \dots 0'_{p'}$$

dei due sistemi Σ e Ξ'.

Data una superficie π di ordine n, che abbia punti e linee multipli rispettivamente degli ordini $x_1, x_2, \dots x_{h-1}, x_h, \dots x_p$ nei punti e nelle linee del gruppo Γ, il gruppo di numeri $G \equiv n x_1 x_2 \dots x_{h-1} x_h \dots x_p$ si chiama *gruppo caratteristico* di quella superficie rispetto al gruppo Γ.

Analogamente, data una curva c, di ordine m, che abbia punti multipli degli ordini $y_1, y_2, \dots y_{h-1}$ nei punti dei gruppo Γ e si appoggi ulteriormente alle linee di tale gruppo in $y_h, \dots y_p$ punti, il gruppo di numeri $G_1 \equiv m y_1 y_2 \dots y_{h-1} y_h \dots y_p$ si chiama *gruppo caratteristico* della curva c rispetto al gruppo Γ.

Poichè si è supposto che la K sia regolare, all'intorno spaziale di un punto fondamentale 0 in uno degli spazii S, S' corrisponde nella K o nella K^{-1} una *superficie fondamentale di 2ª specie* ω' dell'altro spazio.

Invece, una *curva fondamentale di 1ª specie* di uno qualsiasi degli spazi S, S' ha per corrispondente una *superficie fondamentale di 1ª specie* nell'altro spazio.

Infine, a una *curva fondamentale di seconda specie* di uno dei due spazii S, S' è omologa una curva fondamentale di seconda specie dell'altro spazio.

Ciò posto, nell'ipotesi che la corrispondenza regolare K non presenti linee fondamentali di 2ª specie, si scrivano (per linee orizzontali) i gruppi caratteristici rispetto al gruppo Γ:

1° di una superficie generica π collegata alla corrispondenza;

2° delle superficie fondamentali di 2ª specie $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_{h'-1}$ che corrispondono nella K^{-1} ai punti fondamentali $0'_1, 0'_2, \dots 0'_{h'-1}$ della K nello spazio S';

3° delle superficie fondamentali di prima specie $\omega_{h'}, \dots \omega_{p'}$, omologhe nella K^{-1} delle linee fondamentali $0'_{h'}, \dots, 0'_{p'}$, della K nello spazio S'.

Il quadro di numeri A così ottenuto si dice *quadro caratteristico di superficie* della K nello spazio S.

Analogamente, si scrivano per linee orizzontali i gruppi caratteristici rispetto al gruppo Γ:

1° di una curva generica collegata alla corrispondenza;

2° delle curve $i_1, \dots i_{h'-1}$ omologhe ciascuna nella K^{-1} di un intorno piano generico di ognuno dei punti fondamentali $0_1', \dots 0'_{h'-1}$ dello spazio S';

3° delle curve $u_{h'},\dots u_{p'}$ omologhe ciascuna nella K^{-1} di un punto generico di ognuna delle linee fondamentali $0'_{h'},\dots 0'_{p'}$ dello spazio S'.

Il quadro di numeri B così ottenuto si dice *quadro caratteristico di curve* della K nello spazio S.

Analogamente, si costruiscano i quadri caratteristici A', B' di superficie e di curve della K nello spazio S'.

Si hanno allora i seguenti teoremi fondamentali:

I quadri B′, A′ *dello spazio* S′ *si ottengono rispettivamente dai quadri* A, B *dello spazio* S, *mutando le orizzontali in verticali.*

Il risultante di due orizzontali eteronime dei quadri A, B *è nullo; il risultante delle due orizzontali marginali è* $+1$, *mentre il risultante di due orizzontali omonime non marginali è* -1, se si chiama *risultante dei due* gruppi di numeri $G \equiv nx_1 \dots x_{h-1} x_k \dots x_p$, $G \equiv my_1 \dots y_{h-1} y_h \dots y_p$ il numero

$$R = mn - \sum_{1}^{p}{}_i x_i y_i .$$

Le proprietà dimostrate per le orizzontali dei quadri A, B valgono analogamente per le orizzontali dei quadri A', B', cioè per le verticali degli stessi quadri A, B.

Dai teoremi ora enunciati si deducono gli altri:

Nella corrispondenza K *il numero complessivo dei punti e delle linee fondamentali è lo stesso nei due spazii.*

I determinanti A, B, A′, B′ *dati dai quadri caratteristici di superficie e di curve della corrispondenza* K *negli spazii* S, S′ *sono in valore assoluto uguali ad uno.*

Questi teoremi sono, poi, estesi con sottile analisi al caso che nella K si presentino una o più coppie di linee fondamentali di 2ª specie omologhe, con *coefficienti di corrispondenza* (¹) qualunque.

Valendosi di un teorema di Pannelli, (²) si deduce ancora che:

In una corrispondenza birazionale regolare fra i punti di due spazii S, S′, *la somma dei generi delle linee fondamentali è la stessa nei due spazii.*

In particolare:

Se una corrispondenza birazionale regolare K *fra gli spazii* S, S′ *ha in ciascuno dei due spazii una curva fondamentale di 1ª specie*

(¹) Per questo coefficiente veggasi le note dell'A. *Sulla teoria generale delle corrispondenze birazionali dello spazio.* Rend. Acc. Lincei, serie V, vol. XXVII e XXX, 1918 e 1921; pag. 438 e pag. 447.

(²) Pannelli, *Sopra una nuova proprietà delle trasformazioni birazionali nello spazio.* Rend. Acc. Lincei, serie V, vol. XX, 1911, pag. 404.

ed una sola, il genere dell'una curva nello spazio S *è uguale al genere dell'altra nello spazio* S'.

Se una corrispondenza birazionale regolare ha tutte le curve fondamentali nello spazio S *razionali, avrà anche razionali tutte le curve fondamentali nello spazio* S'.

Infine, la Memoria si chiude con la dimostrazione del seguente teorema:

Tutti e soli i piani tangenti alle curve fondamentali di 1^a *specie dello spazio* S' *(o* S*) hanno per omologhe nella corrispondenza* K^{-1} *(o nella* K*) le superficie non degeneri del sistema* Σ *(o* Ξ'*) dotate di punto doppio non fondamentale nè situato su linee fondamentali.* *g. v.*

M. Picone: 1. *Nuove osservazioni su alcuni metodi d'approssimazione dell'Analisi* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1922). Presentata alla Direzione del giornale nel settembre del 1921.

— —: 2. *Nuovo metodo d'approssimazione per la soluzione del problema di Dirichlet* (Rendiconti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, 7 maggio 1922).

— —: 3. *Condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza e calcolo di una soluzione periodica per il più generale sistema di equazioni differenziali ordinarie* (ibidem, 4 maggio 1924).

Nel fascicolo n.° 4 dell'anno passato di questo « Bollettino » (pp. 185-186), in un rendiconto della Redazione, sono stati segnalati i lavori di N. Kryloff nei quali il *metodo dei minimi quadrati* per l'integrazione approssimata delle equazioni differenziali della Fisica-matematica è studiato per il più semplice problema al contorno relativo alle *equazioni differenziali lineari ordinarie del 2° ordine.*

In tale rendiconto viene attribuito ai lavori del Kryloff anche il merito d'avere fatto sperare che « il metodo fondato sulla minimizzazione di un certo integrale (*metodo dei minimi quadrati*) prenderà un posto legittimo fra i metodi d'integrazione approssimata delle equazioni differenziali della Fisica-matematica ». E ciò, nonostante che, per brevità d'esposizione, come dice il Kryloff, egli non si sia mai occupato dell'integrazione delle equazioni alle derivate parziali.

Mi sia consentito d'osservare che già nei citati miei lavori, indipendentemente dal Kryloff, al metodo dei minimi quadrati è stata conferita anche importanza teorica per il calcolo approssimato delle soluzioni dei problemi della Fisica-matematica. Nella prefazione del lavoro n.° 1 mi esprimo testualmente così:

« ...., concependo anche in analisi l'errore d'approssimazione al modo delle scienze sperimentali, io riprendo il metodo dei minimi quadrati e oso pensarne l'applicazione sistematica all'integrazione approssimata di intiere classi di equazioni alle derivate parziali...., dopo la scoperta di LEBESGUE delle funzioni sommabili, dopo l'introduzione, dovuta al FISCHER, della convergenza in media, il metodo dei minimi quadrati acquista una nuova, insperata potenza, anche nel campo della pura analisi matematica, e là ove esso non arrivava che per una congettura, vi arriva, come qui ho dimostrato (al n.° 20, § V) con matematica certezza ».

Nel lavoro n.° 2, enunciato il teorema che stabilisce la completezza dei polinomii armonici sulla frontiera (supposta un continuo) di ogni dominio regolare, è indicato come il teorema del § V del lavoro n.° 1 porti ad assicurare l'uniforme convergenza di un effettivo calcolo d'approssimazione numerica per la soluzione del problema di DIRICHLET relativo alle funzioni armoniche in due o tre variabili, nelle ipotesi più generali possibili. Mi corre però ora l'obbligo, che peraltro mi è gradito compiere, di dire che il detto teorema di completezza dei polinomii armonici, limitatamente al caso di due variabili, è stato anche enunciato — molti anni prima di me — dall'eminente matematico russo SERGE BERNSTEIN. Il che ho appreso, occasionalmente, soltanto in questi giorni, dal Sig. KRYLOFF.

Nel lavoro n.° 3, prendendo in considerazione il più generale sistema di p equazioni differenziali ordinarie del primo ordine in p funzioni incognite, è applicato il metodo dei minimi quadrati all'ottenimento e di un criterio per l'esistenza e del calcolo numerico d'approssimazione di una soluzione, costituita da funzioni periodiche, di assegnato periodo. Il metodo studiato dal KRYLOFF, dal 2° semestre 1925 in poi, ha la precisa forma da me data in quest'ultimo lavoro, del 4 maggio 1924. Notevole è l'iniziale coincidenza di questo col lavoro di KRYLOFF: *Approssimate solutions of a system of differential equations of mathematical physics by least squares* (Bulletin of the American mathematical Society, vol. XXXII), presentato alla Società il 29 dicembre 1925.

Napoli, 31 dicembre 1926.

E. MACCAFERRI: *Su la teoria delle grandezze*, negli « Atti del R. Istituto Veneto di Scienze », adunanza 25 aprile 1926.

Una teoria delle grandezze consiste nell'enunciare un certo numero di proprietà per le grandezze, e da esse dedurre tutte le altre proprietà. Questa questione fu trattata da EUCLIDE e da tutti i geometri dei secoli scorsi.

Con qualche semplificazione sui lavori critici più recenti, l'A. presenta un sistema di postulati sufficiente a dedurre la teoria delle grandezze assolute. Tra tali postulati è la proprietà associativa e commutativa della somma, ed è il postulato della continuità in forma equivalente a quella di DEDEKIND. Si dimostra poi il principio di ARCHIMEDE e la esistenza di un sottomultiplo qualunque.

L'A. dimostra poi che, nel proposto sistema di postulati, alla proprietà commutativa si può sostituire il principio di ARCHIMEDE, e che allora il postulato della continuità di DEDEKIND risulta sovrabondante e può essere sostituito con quello più semplice di CANTOR. Sicchè nei due sistemi di postulati, (A) da cui si parte, (C) ottenuto, si possono considerare equivalenti le due coppie di proposizioni:

proprietà commutativa e postulato di DEDEKIND,
principio di ARCHIMEDE e postulato di CANTOR,

risultato più preciso di quello che si suole enunciare dicendo che « il postulato di DEDEKIND è equivalente all'insieme dei due postulati di ARCHIMEDE e di CANTOR ».

La memoria contiene altri particolari svolgimenti che l'A. considera non privi di interesse scientifico.

G. USAI: *Sopra alcune equazioni della teoria delle rendite.* « Bollettino Accademia Gioenia di Scienze Naturali » in Catania, giugno 1926, fascicolo 56.

Viene data la soluzione generale di un tipo di equazioni integrali usato nella Matematica Finanziaria per le rendite nel continuo.

— —: *Ancora su equazioni riguardanti la Matematica Finanziaria.* Risposta ad una Nota del prof. LENZI. « Bollettino Accademia Gioenia di Scienze Naturali » in Catania, fascicolo 57.

Sono date per i tre problemi finanziari: rendite nel continuo, costituzione di capitali, ammortamenti, le soluzioni generali delle equazioni relative.

Per il caso delle rendite si ha lo stesso risultato della Nota precedente, ma in forma diversa.

— —: *Di alcune equazioni integrali che interessano la Matematica Finanziaria.* « Giornale Matem. Finanz. », Torino, gennaio-febbraio 1927.

In tale Nota viene data la soluzione generale per le equazioni usate dal prof. LENZI e per taluni problemi di previdenza.