Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Gustavo Sannia, Salvatore Pincherle

Recensioni

* G. Fubini - B. Cech: Geometrìa proiettiva differenziale
* E. Borel: Traité du Calcul des Probabilités et de ses applicationsf T. II, fasc. I. Applications à l'Arithmétique et à la théorie des fonctions

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **5** (1926), n.5, p. 243–251.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_5_243_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1926.

RECENSIONI

G. FUBINI-E. CECH: *Geometria proiettiva differenziale.* Tomo I, pagine 388. (Bologna, Nicola Zanichelli, 1926).

La geometria proiettiva differenziale aveva già ricevuto uno sviluppo sistematico (per lo spazio ordinario) specialmente per opera di WILCZYNSKI, quando il FUBINI con una serie di lavori (il primo del 1916) vi arrecò un soffio di vita nuova, portandola nell'indirizzo segnato da GAUSS nella geometria metrica, ossia definendovi le varietà geometriche mediante forme (anzichè equazioni) differenziali. Ciò consentiva, non fosse altro, di giovarsi dell'ausilio potente del *Calcolo assoluto* per affrontare quistioni più ardue e generali, e la geometria iperspaziale.

Ed infatti la geometria proiettiva differenziale fece allora così rapidi progressi, da far presto sentire il bisogno di un trattato che raccogliesse e coordinasse dal nuovo punto di vista tutti i più importanti risultati conseguiti. Ed è da notare che, se questo tomo I, dedicato alle curve e alle superficie dello spazio ordinario, è comparso solo in quest'anno, la composizione di esso fu iniziata dal FUBINI fin dal 1921; il ritardo è dovuto alla grande quantità di risultati da raccogliere (e crescente durante la raccolta) e alla collaborazione a distanza (non meno grande) col CECH. E certamente è stata la preoccupazione del lunghissimo tema che ha portato gli Autori a una esposizione che è riuscita forse troppo densa.

Non è a dire quanto la collaborazione abbia giovato; per quanto nel trattato sia fatto rilevare quali risultati spettino al FUBINI e quali al CECH, tuttavia questi risultati spesso si innestano, provando il continuo reciproco influsso dei due insigni collaboratori; ai quali gli studiosi saranno grati di questo trattato che può dirsi presenti un mondo geometrico nuovo, dai larghissimi orizzonti, nel quale però si ritrovano anche vecchie conoscenze che, per il loro carattere proiettivo, sembrano vivervi con più agio che nel mondo metrico ove prima erano tenute costrette.

Nell'*Introduzione*, oltre a fissare convenzioni e nota richiamare o a estendere cose note, si dànno anche concett come l'***orientazione proiettiva*** di una punteggiata o di un che consente poi di distinguere, anche in geometria prc due versi su di una curva (§ 7) e due facce su di una su (§§ 12 e 13). Si dànno le condizioni *esplicite* per il cont 1°, 2°,... ordine di curve o superficie parametricamente d e sono quelle che hanno consentito al FUBINI la scopert ***applicabilità proiettive*** delle superficie (corrispondenze punti operano come una collineazione fino all'intorno di 2° or alle quali il ČECH ha dato aspetti finiti (§ 20). Si osserva che ogni collineazione può considerarsi come il prodotto collineazione ***unimodulare*** (rappresentata in coordinate om da una sostituzione lineare di modulo 1) e di una collin ***moltiplicativa*** ρ (che moltiplica le coordinate per uno stes tore ρ, sicchè geometricamente equivale all'identità).

Questa decomposizione di una collineazione si è dim opportunissima. Per ogni varietà V che si vuol considera corre andare in cerca di enti analitici (forme differenziali zioni) Φ, intrinseci e invarianti per collineazioni, e atti a viduarla a prescindere da collineazioni. Orbene si fac problema procedendo in due tappe, e incominciando col enti F che godano le stesse proprietà e compiano lo stesso ma *limitatamente alle collineazioni unimodulari*. Gli F varia una collineazione moltiplicativa ρ, ossia variando il fatt proporzionalità ρ insito nelle coordinate omogenee, ma po *mando* tale fattore con qualche legge L, anche gli F ris normati; sicchè, se si adopera una legge Λ intrinseca e inv per collineazioni, gli F diventano i Φ desiderati.

Naturalmente, poichè la stessa V (curva o superficie) pu concepita in due modi duali, occorre normare tanto le coord dei suoi punti, quanto quelle ξ dei suoi piani, deducibili a meno di un fattore. Ma è da avvertire che qui tale *vien sempre fissato*, con legge tale che, normate le x, risultin normate senz'altro le ξ (o viceversa); e la legge è scelta ne più felice, arrecando simmetria nell'algoritmo e facendo di gli enti F o Φ individuanti due V *correlative* solo per qualche

Ho creduto opportuno di fare questi rilievi perchè p costituire un filo conduttore per chi studia il trattato, o per chi voglia edificare una qualunque geometria differenzia raccolga le proprietà invarianti per le collineazioni di q gruppo, come le geometrie *metriche* e quella *affine*. Ma tra ultime e la proiettiva vi è una differenza essenziale, perch

·lle prime è possibile (per l'esistenza di un *assoluto*) fissare una gge Λ *unica per tutti i punti dello spazio* [1].

È gran merito del FUBINI l'aver riconosciuto la possibilità trovare anche in geometria proiettiva una legge Λ, *ma solo per i unti di ogni singola varietà* (quindi da dedursi dalla varietà stessa) di averne effettivamente trovata una, anzi *la più semplice possibile*, per le superficie (ed ipersuperficie) non rigate [2].

È spontaneo pensare che, a normazione eseguita, dovesse essere nveniente usare sistematicamente soltanto enti normati. Non è sì: l'esperienza ha mostrato che ciò condurrebbe a gravi comicazioni; ed ha mostrato che anzi l'indeterminatezza della legge normazione costituisce spesso un vantaggio, potendo poi diorne caso per caso nel modo più opportuno. Di ciò nel volume riscontrano esempî numerosi.

Nel Cap. I è esposta la teoria delle *curve sghembe* [3], per le ali si assumono come enti F quattro forme differenziali F_i di line i ($i = 3, 5, 6, 7$) di un parametro arbitrario u, o tre funni θ, q, c di u opportunamente normato. Se ne deducono poi enti Φ normando le coordinate omogenee con la condizione e risulti uguale a 1 la θ o una quarta funzione V di u (se $\theta = 0$); tano così escluse solo le curve per le quali risulta $\theta = V = 0$ *cubiche sghembe*): u e q, c normati possono dirsi *arco* e *curvae (proiettivi)* della curva.

Passando a enti geometrici, vengono definiti per ogni punto M la curva: un *tetraedro principale* T (che tiene il posto del triedro la geometria metrica); poi degli enti osculatori (cono, fascio cubiche, sistema nullo) e certi punti e piani notevoli che contono di dare una interpretazione geometrica di T, prima defia solo analiticamente [4].

[1] Per lo sviluppo di tutte queste considerazioni mi sia consentito viare alla mia Memoria: *Riavvicinamento di geometrie differenziali delle erficie: metriche, affine e proiettiva.* (Annali di Matematica, serie III, o XXXI, p. 165).

[2] Per le superficie rigate la legge Λ è dovuta al CECH, per le curve ii scrive.

[3] Con un cenno di quella delle *curve piane*, la quale *non* è contea nella prima.

[4] In una mia precedente trattazione (Annali di Matematica, serie IV, o I, 1923-24, pagg. 1-18 e tomo III, 1925-26, pagg. 1-26) avevo introo degli invarianti proiettivi I, J, K e un tetraedro F: i primi diffeono da q, V, c solo per fattori numerici $\left(\text{valgono } \frac{1}{10} q, \ -\frac{1}{5} V, \ -c\right)$; ece F differisce sostanzialmente da T e dipende da un intorno di M è di ordine *minore* di quello da cui dipende T.

Nel Cap. II si inizia la trattazione delle *superficie* (non sviluppabili). Fra le tangenti notevoli per un punto M di una superficie S ed aventi carattere proiettivo, quelle che prima si presentano dopo le due *tangenti asintotiche* sono le tre *tangenti di Darboux* (con le coniugate *di Segre*): le ∞^2 quadriche osculatrici a S in M segano S secondo linee aventi in M un punto triplo e le terne di tangenti in esso costituiscono una involuzione ∞^2; le rette triple sono appunto le tangenti di DARBOUX e costituiscono una terna della stessa involuzione. proveniente da un fascio di quadriche osculatrici dette perciò *quadriche di Darboux*.

Or dunque volendo individuare S mediante forme di 1° ordine nei differenziali du, dv è naturale considerarne due (quadratica e cubica, e necessariamente *apolari*) che uguagliate a zero rappresentino rispettivamente le *linee asintotiche* e le *linee di Darboux*; così peraltro ciascuna di esse risulta definita solo a meno di un fattore dipendente dalla scelta delle u, v e dal fattore di proporzionalità ρ delle coordinate omogenee: è merito del FUBINI di averne anzitutto trovate due F_2, F_3 che sono intrinseche, invarianti per collineazioni unimodulari e tali che il loro rapporto è indipendente da ρ, sicchè esso è intrinseco e invariante per *ogni* collineazione (§ 12). Tale rapporto, per il quale BOMPIANI e CECH hanno trovato interpretazioni geometriche [§ 13, B) e § 21, B)], merita il nome di *elemento lineare proiettivo*, perchè la condizione necessaria e sufficiente per l'applicabilità proiettiva di due superficie è che siano uguali i rispettivi rapporti $F_3 : F_2$ in punti corrispondenti (§ 20).

Segue da ciò che F_2, F_3 non possono sempre individuare S, ma tutta una classe di superficie proiettivamente applicabili su S. Per determinare altri elementi atti ad individuare S, si cercano (§ 14) le equazioni differenziali a cui debbono soddisfare le coordinate x dei punti (o ξ dei piani) di S; e si vede così che in esse compaiono anche i coefficienti di una terza forma quadratica P (o Π) apolare a F_2, che perciò è indispensabile assegnare per individuare S; ma poichè si trova che i coefficienti di $P - \Pi$ sono esprimibili mediante quelli di F_2 e F_3, si conclude che basta anche assegnare la forma $Q = P + \Pi$ (col vantaggio della simmetria).

Le x (quindi le ξ e tutte le forme) possono normarsi con legge varia (§ 15): imponendo che risulti uguale a -1 l'invariante algebrico simultaneo I di F_2, F_3 (unico a cagione della apolarità) nasce la legge Λ di FUBINI, alla quale si è accennato più innanzi, e per la quale F_2, F_3 diventano *forme normali* Φ_2, Φ_3 (e così le altre forme). Naturalmente ciò esige che non sia $I = 0$, il che si verifica identicamente solo se S è rigata.

Congiungendo il punto $M \equiv (x)$ di S col punto di coordinate $X = \frac{1}{2} \Delta_2 x$ (il parametro differenziale essendo costruito rispetto a Φ_2), si ha una retta intrinseca e invariante per collineazioni: è la *normale proiettiva* (del FUBINI) di S in M, che, come quella metrica, descrive (variando M) una congruenza le cui sviluppabili tracciano su S un sistema coniugato (*linee di curvatura proiettive*). Naturalmente non è la sola retta che goda di questa proprietà, come la legge Λ di FUBINI non è la sola adottabile; ma la retta normale e la legge Λ di FUBINI sono *le più semplici possibili* in un certo senso ben determinato [§ 15, D)] [5]. È notevole che si può fissare una metrica riemanniana dello spazio intorno a S (determinata dalla S medesima, in modo intrinseco e invariante per collineazioni) nella quale la normale proiettiva risulta *ortogonale* a S, e che produce su S una metrica di elemento lineare $ds^2 = \Phi_2$ che consente di estendere molti concetti della geometria metrica.

Le forme F_2, F_3 (in particolare Φ_2, Φ_3) e Q non possono darsi ad arbitrio per definire una S. La ricerca delle condizioni necessarie e sufficienti vien fatta nel Cap. II per il caso particolare in cui le linee u, v sono le asintotiche, e nel quale si hanno formule relativamente semplici, quindi adatte per le applicazioni (contenute nei Cap. II, III e V). Per es. se ne deducono in modo nuovo e spontaneo le *coordinate di Lelieuvre* e le corrispondenti *formule*, completate da una nuova; e si determinano le superficie le cui asintotiche appartengono a complessi lineari (§ 18). Si ottengono poi risultati interessantissimi, e in gran parte nuovi, relativi alle due coppie di *invarianti* delle equazioni di LAPLACE a cui soddisfano le coordinate x di punti o ξ di piano tangente di S quando vien riferita a un sistema coniugato; e la ricerca di quei sistemi coniugati i cui invarianti puntuali o tangenziali risultano uguali la si fa dipendere da nuovi semplicissimi sistemi di equazioni differenziali (§ 17); e poichè da uno di questi si fa poi (Cap. V) dipendere anche la ricerca delle *congruenze W* aventi S come una falda focale, si hanno così nuovi e interessanti legami tra i due problemi.

Nel Cap. III si introducono gli *elementi geometrici fondamentali* per lo studio dell'intorno di un punto M di S: il fascio delle *quadriche di Darboux* (§ 21), la più importante delle quali è la *quadrica di Lie*; la *corrispondenza di Segre* (§ 22) che associa il

(5) E che, come ho dimostrato in loc. cit. (1), consente di dare una definizione *unica* di *retta normale* nelle geometrie metriche, affine e proiettiva.

piano osculatore in M di una linea L di S per M e il punto comune ai piani tangenti a S in M e in due punti consecutivi su L.

È naturale chiamare *geodetiche proiettive* di S le linee geodetiche nella metrica definita su S da Φ_2. Nel § 23 vengono prese in considerazione le linee definite da una equazione di tipo più generale di quella che definisce tali geodetiche e nella metrica corrispondente a F_2 (comunque normata); di questo tipo è per es. quella a cui soddisfanno le *curve di un fascio*, cioè le curve per le quali risulti $\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{du}{dv} =$ costante con una data funzione λ. E se ne deducono risultati notevoli, considerando o il caso particolare del fascio oppure le coppie o le terne di quelle linee (uscenti da M) che sono apolari alle asintotiche. Anche più interessante è lo studio analogo fatto per le *pangeodetiche* (§ 24), cioè per le linee che annullano la variazione prima dell'integrale di $F_3 : F_2$.

Nel § 25 si considera la congruenza K generata da una retta r uscente da un punto M di S, e la duale K', generata dalla retta r' polare di r rispetto alla quadrica di LIE; e particolarmente il caso in cui alle sviluppabili di K e di K' corrisponde su S un sistema coniugato. E se r è la normale proiettiva, la considerazione dei fuochi di r conduce a definire le *curvature proiettive, la cui semisomma vale la curvatura di* Φ_2 *diminuita di 1* (teorema che qui tiene il posto del celebre teorema di GAUSS).

Durante tutti i precedenti studii (del Cap. III) si ritrovano la normale proiettiva e varie altre rette che pure erano state introdotte perchè in qualche modo tenessero il posto della normale metrica; ed è notevole che tutte queste rette (trovate per vie differenti) appartengono a un medesimo fascio (§ 27). E qui si presentano spontanee le estensioni della sfera, considerando le superficie per le quali qualcuna di tali rette passi costantemente per un punto fisso: si ritrovano (§ 28) così le *superficie di Tzitzeica-Wilczynski* e si hanno nuove classi di superficie notevoli (di CECH).

Nel Cap. IV si fa uno studio a parte delle *superficie rigate* (non sviluppabili); studio necessario, perchè per esse cessano di valere molti dei risultati generali (in particolare, quelli nei quali interviene la legge A di FUBINI). Vi si dimostra che una superficie rigata può essere determinata (come una curva) da un certo numero di invarianti, funzioni di uno speciale parametro u (*arco proiettivo*); e si assegna una legge Λ di normazione delle coordinate avente un significato geometrico. Però nella determinazione di tutti questi enti bisogna tener distinti quattro casi, e qui non possiamo neppure accennare agli svariati e interessanti risultati geometrici (nuovi in gran parte) ai quali si perviene.

Il Cap. V svolge una teoria puramente proiettiva delle *con-uenze W*, la quale è molto più semplice di quella ordinaria, olta per via metrica; e ciò era da aspettarselo. Ne è il fonda-›nto un notevolissimo teorema di FUBINI sulle congruenze [§ 41,] che può essere fecondo di estese applicazioni. Qui, applicato e congruenze W, dà la ragione intima della nota equivalenza l problema della ricerca *delle congruenze* $\overset{*}{W}$ *aventi una assegnata lda focale S* e del problema della ricerca *delle deformazioni infi-esime di S* in geometria euclidea o non euclidea; inoltre riduce primo problema alla integrazione di un sistema di equazioni fferenziali di estrema semplicità (come si è già accennato trat-ıdo del Cap. II).

Con l'uso di tale sistema si ha una nuova e più semplice ›ttazione delle *trasformazioni* (delle superficie) *per congruenze W* 12), della composizione di due di esse e del *teorema di permuta-ità* (§ 50); in particolare si ritrovano (§§ 52, 53) e si completano 54) i risultati di JONAS relativi a una classe di superficie, e si ›vano analoghe teorie per altre classi di superficie notevoli, me (§ 45) le *superficie R* di TZITZEICA e DEMOULIN (che com-endono quelle applicabili su di una quadrica, nel senso metrico) e *superficie isotermo-asintotiche* di FUBINI (§ 51); si riduce la erca delle *congruenze di Wilczynski* (coppie di congruenze aventi comune una falda focale ed appartenenti entrambe a complessi eari) a quella delle superficie a curvatura costante nella geo-tria metrica; si ottiene infine con semplicità un ampio studio lle *congruenze le cui falde focali sono rigate*, col quale si ritro-no risultati noti e se ne dànno dei nuovi.

Nel Cap. VI si determinano gli invarianti di 1° e di 2° ordine l'elemento lineare $F_3 : F_2$ o (per sup. non rigate) della coppia forme Φ_2, Φ_3; poi, mediante essi, si risolve il *1° problema del-pplicabilità proiettiva*: riconoscere se due superficie date (e basta ne sian dati gli elementi lineari) sono proiettivamente appli-›ili e, nel caso affermativo, determinare tutte le corrispondenze ntuali tra esse che sono applicabilità proiettive; in particolare, onoscere se una superficie data può essere applicabile in più un modo su se stessa (cioè si comporta come una superficie di azione della geometria metrica).

Infine nel Cap. VII vien risoluto in tutta la sua generalità problema della ricerca delle condizioni necessarie e sufficienti nchè tre forme F_2, F_3 e P (o Π o Q) assegnate individuino una ›erficie S, a meno di una collineazione, e si completa la deter-nazione delle equazioni differenziali fondamentali atte a fornire coordinate x o ξ dei punti o dei piani tangenti di S; poi condizioni ed equazioni vengono poste sotto altre forme più semplici ed eleganti per il caso in cui le F_2, F_3 sono le Φ_2, Φ_3 normali (quindi S non è rigata), ed è notevole che allora alla terza forma (che è quadratica) può sostituirsi una forma *lineare* τ che con Φ_2, Φ_3 pure individua la S.

Viene poi affrontato il *2° problema dell'applicabilità proiettiva* che consiste nel cercare tutte le superficie proiettivamente applicabili su di una data S o aventi un dato elemento lineare proiettivo $F_3 : F_2$. Anzi, poichè dalle condizioni di esistenza risulta che tale elemento non può esser dato ad arbitrio (come invece accade per l'elemento della geometria metrica), vien posto e risoluto il problema più generale: dato $F_3 : F_2$, riconoscere se esiste qualche superficie S che lo ammetta come elemento lineare e, nell'affermativa, determinarle tutte. E si trova che quando S esiste, è unica o appartiene a una famiglia continua di superficie (dipendente da 1, 2 o 3 parametri) tutte applicabili proiettivamente tra loro o, come può dirsi, tali che ciascuna è *proiettivamente deformabile* in ciascuna delle altre.

E allora viene posto e risoluto il problema: data una superficie, riconoscere se è proiettivamente deformabile (al più in ∞^3 modi) e, in caso affermativo, determinare tutte le sue deformate. In particolare vengono studiate le superficie che sono deformabili in ∞^3 modi, e che costituiscono una classe notevole fra quelle isotermo-asintotiche.

Non mi lusingo di aver messo in piena luce tutta la bellezza del nuovo edifizio geometrico che il Trattato ci presenta, troppo vasto per una rapida descrizione; tuttavia spero di esser riuscito a destare nel lettore il desiderio di penetrare in esso, per poi uscirne alla esplorazione dei dintorni, ricchi di promesse.

G. SANNIA

E. BOREL: *Traité du Calcul des Probabilités et de ses applications*, T. II, fasc. I. *Applications à l'Arithmétique et à la théorie des fonctions*, rédigées par P. DUBREIL (Paris, Gauthier-Villars, 1926).

L'opera di vasta mole intrapresa dal BOREL, coll'aiuto di numerosi e valenti collaboratori, sul Calcolo delle probabilità e sulle sue applicazioni, e che consta di varî volumi, suddivisi in fascicoli ciascuno dei quali è una monografia a sè stante, con vantaggio della varietà ma forse con qualche danno dell'organicità dell'opera, si arricchisce oggi di un fascicolo contenente le lezioni date dal BOREL nel 1924-25 alla Facoltà di Scienze di Parigi e redatte da un suo discepolo, fascicolo che interessa notevolmente i cultori dell'Analisi pura. Esso contiene uno studio delle proprietà asintotiche degli sviluppi decimali: come, primo caso, è studiato il problema della frequenza con cui una cifra, il 3 ad esempio, si presenta nello sviluppo decimale di un numero, e lo studio di questa frequenza, che gode di una sorte di continuità (continuità asintotica) conduce alla distinzione degli sviluppi decimali in normali ed eccezionali. Uno studio analogo si fa poi per gli sviluppi in frazioni continue, studio al quale si connettono richiami alla teoria della crescenza delle funzioni e alla maggiore o minore rapidità di convergenza delle serie.

In questi studî viene introdotto l'esame delle *probabilità numerabili*, che corrispondono agli aggregati numerabili della teoria degli insiemi e che danno il passaggio fra le probabilità dei casi in numero finito e le probabilità nel continuo, ed è messa in rilievo una certa affinità fra il concetto di probabilità e quello di misura di un aggregato; affinità che non è però senza qualche indeterminatezza, inevitabile forse in questioni di questa natura. Un ultimo Capitolo è dedicato appunto a questi legami fra il Calcolo delle probabilità e la teoria degli aggregati, e termina con un esame critico del celebre principio di scelta di Zermelo mediante un esempio in cui l'applicazione di questo principio conduce necessariamente ad una contraddizione.

Fra le note poste in fondo al volume, la prima richiama quelle definizioni e quei principî della teoria degli aggregati che sono stati adoperati nei varî Capitoli; un'altra sviluppa l'analisi dei problemi in cui le eventualità e le prove costituiscono un'infinità numerabile. *s. p.*