Salvatore Pincherle

Il Calcolo delle differenze finite

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **5** (1926), n.5, p. 233–242.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_5_233_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1926.

RELAZIONI SCIENTIFICHE

Il Calcolo delle differenze finite. (*)

1. Se vi è nella matematica una teoria che, classica una volta, si sia poi riguardata da molti, e particolarmente presso di noi, come condannata all'oblìo, è questa il Calcolo delle differenze finite. Questo Calcolo nasce, o almeno assume forma di dottrina a sè stante con BROOK TAYLOR nel suo *Methodus incrementorum*, sul principio del secolo XVII; attira presto l'attenzione dei matematici poichè, pochi anni dopo, il francese F. NICOLE pubblica un *Traité du Calcul des différences finies* e varie Memorie sull'argomento medesimo; forma materia di numerosi scritti di EULER (le cui notazioni sono all'incirca quelle usate oggidì), di LAGRANGE, di LAPLACE, di HERSCHEL, di LACROIX, ecc.; presso di noi forma oggetto di studi per parte di BRUNACCI, di PLANA, di BORDONI, di GENOCCHI, di TORTOLINI, di TARDY, di BRIOSCHI, di CASORATI, ecc. Eppure, nei trattati di Calcolo, dove un tempo formava, col Calcolo delle variazioni, quasi un appendice obbligata, non se ne trova oggi quasi mai un cenno, e ben poco posto trova, e assai di rado, nei corsi universitari.

Di questo ostracismo ci si può rendere ragione. Lo sviluppo del Calcolo differenziale ed integrale, colle infinite sue applicazioni; il signoreggiare del concetto di limite e le critiche, che, nate dalla necessità di precisare questo concetto, conducevano alla necessaria revisione dei fondamenti del Calcolo; l'interesse destato dai fecondi risultati della teoria delle funzioni di variabile reale d'una parte, delle analitiche dall'altra, e dalle attraenti questioni della teoria degli aggregati: tutto ciò lasciava poco posto ad un capitolo della scienza in cui il concetto di limite appariva a prima vista pressochè estraneo, mentre anche quei rami dell'analisi in cui quel concetto ha minore parte, intendo

(*) Sunto di una lettura tenuta nella XV riunione della Società italiana per il Progresso delle Scienze, Bologna, ottobre-novembre 1926.

dire l'algebra superiore, la teoria di GALOIS, gli studi sui gruppi finiti, non parevano offrire, col Calcolo delle differenze finite, alcun addentellato.

Però, un esame più attento fa nascere non solo il pensiero che questo ramo della scienza sia ancora degno di interesse, ma la fiducia che, in grazia delle nuove vie che di recente gli vennero aperte, possa giustamente aspirare ad un più brillante avvenire.

2. L'idea di considerare le successive differenze degli elementi di una successione di numeri è certamente molto antica: essa si afferma dapprima sia col concetto di progressione aritmetica, sia quando si osserva che la differenza fra due quadrati interi consecutivi è il numero dispari di ugual posto del maggiore quadrato, sia coll'antica e famosa successione di FIBONACCI; ma solo relativamente tardi se n'è intrapreso sistematicamente lo studio. Definita, per una funzione $f(x)$, la differenza finita da

$$f(x+h)-f(x),$$

si sarebbe potuto considerare h come variabile; ma l'attenzione si è rivolta dapprima al caso semplice e di immediata applicazione in cui questo incremento è costante, nel quale caso esso si assume spesso come unità: manifestandosi così il carattere statico del Calcolo delle differenze in questo suo primo stadio, in confronto di quello, essenzialmente dinamico, del Calcolo differenziale.

Elemento fondamentale nel Calcolo delle differenze è dunque l'operazione

$$f(x+1)-f(x),$$

applicata alla funzione generica $f(x)$. A rappresentarla, si usa, da EULERO in poi, il simbolo operatore Δ, manifestamente distributivo e di cui si definiscono immediatamente le potenze. Ma a questo operatore si può sostituire, talvolta con vantaggio, quello che ha per effetto di mutare, in una funzione generica, x in $x+1$: operazione detta « état varié », dagli analisti francesi del secolo XVIII, e richiamata opportunamente dal nostro CASORATI, che propose per essa il simbolo θ. Da notarsi la proprietà eminentemente distributiva di questo operatore, poichè, per ogni funzione razionale F, si ha:

$$\theta F(f_1(x),\ f_2(x),\ldots)=F(\theta f_1(x),\ \theta f_2(x),\ldots).$$

Fra gli operatori Δ e θ passano le relazioni

$$\Delta = \theta - 1, \quad \theta = \Delta + 1,$$

da cui

$$\Delta^n = \theta^n - n\theta^{n-1} + \binom{n}{2}\theta^{n-2} - \dots + (-1)^n,$$

$$\theta^n = \Delta^n + n\Delta^{n-1} + \binom{n}{2}\Delta^{n-2} + \dots + 1;$$

ed il trasporto dell'usuale calcolo letterale a quello degli operatori o calcolo simbolico, in cui si è voluto talora ravvisare quasi un che di mistico di cui si ha qui un primo esempio, è stato largamente sfruttato sopratutto dai matematici inglesi BOOLE, CARMICHAEL ed altri; anzi, il trattato sul Calcolo delle differenze del primo di questi Autori, pubblicato a Cambridge nel 1860, tradotto in tedesco nel 1867 e che per molto tempo è rimasto classico, fa di questo calcolo simbolico un uso sistematico.

3. Il simbolismo ora accennato conduce bensì a raffronti interessanti e riesce spesso ad illuminare complessi meccanismi di Calcolo che altrimenti riuscirebbero oscuri: ma, dato il suo carattere prevalentemente formale, non costituirebbe un titolo di merito per il Calcolo delle differenze che ne fu l'iniziatore, se non servisse alla soluzione di questioni essenzialmente pratiche, come quella della interpolazione. A simili problemi ha recato un importante contributo il Calcolo delle differenze, sia nella costruzione di formule atte a risolverli, sia nella valutazione dell'errore che si commette sostituendo il valore dato dalla formula al vero valore della funzione che si tratta di interpolare. È particolarmente manifesto il valore del nostro Calcolo quando si tratta di interpolare per intervalli equidistanti, poichè in questo caso le formule di interpolazione sono appunto ordinate per le differenze successive Δf, $\Delta^2 f$,... della funzione che si tratta di interpolare.

Tali sono, ad esempio, le formule usate per il calcolo e per il controllo delle Tavole di logaritmi; tali quelle che servono per la formazione e per l'uso di innumerevoli tabelle numeriche.

Alle formule per l'interpolazione, e, per esse, al Calcolo delle differenze, si collega la questione del calcolo approssimato degli integrali definiti mediante somme di numero finito di termini, calcolati in punti, equidistanti o no, dell'intervallo di integrazione. Si giunge così alle note formule dei trapezi, di SIMPSON, di COTES, ed alla valutazione dei relativi errori. Si presenta qui la questione, trattata per primo da GAUSS colle sue quadrature meccaniche, di quella distribuzione di punti nell'intervallo d'integrazione atta a dare la migliore approssimazione, ed è in tale questione che si presentano nel modo più spontaneo i polinomî di LEGENDRE.

4. Tralasciando di citare altri particolari interessanti, come per esempio le relazioni che intercedono fra le differenze finite e le derivate delle potenze di x, passiamo al problema inverso della formazione della differenza finita, o problema di sommazione, che sta al primo come l'integrazione sta alla differenziazione. Le due funzioni $F(x)$, $f(x)$ essendo legate dalla relazione

$$F(x+h)-F(x)=f(x),$$

$F(x)$ è detta *somma* di $f(x)$, $(\Sigma f(x))$, come $f(x)$ è la *differenza* di $F(x)$. Da questa relazione nasce la formula

$$F(a+nh)=F(a)+f(a)+f(a+h)+\ldots+f(a+(n-1)h),$$

che, nonostante la sua semplicità, si potrebbe quasi dire la sua trivialità, serve a molteplici fini: alla determinazione di F, data f, come al calcolo di una somma $\sum_{1}^{n} f(a+\nu h)$ quando F si possa determinare.

Particolarizzando la forma della $f(x)$, supponendola razionale intera o razionale fratta, o della forma $a^x\varphi(x)$ con $\varphi(x)$ intera, ecc., si ottengono numerosi risultati che interessano l'Algebra, la Teoria dei numeri, il Calcolo delle probabilità. In questo ordine di idee, è pure importante la ricerca della differenza che intercede fra la somma di una funzione, nel senso ora indicato, ed il suo integrale definito nel medesimo intervallo; differenza che viene espressa mediante una formula celebre, detta formula sommatoria di EULERO-MACLAURIN, ed in cui è pure notevole lo studio del resto, nullo per le funzioni intere di grado inferiore al numero dei punti di divisione dell'intervallo. Nella espressione della formula sommatoria predetta si presentano spontanei i noti numeri bernoulliani; nello studio del resto, si presentano i polinomî soddisfacenti alla relazione

$$f(x+1)-f(x)=nx^{n-1}, \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots)$$

che per $x=0$ danno i numeri bernoulliani e che sono detti polinomî di BERNOULLI; in stretta relazione con questi stanno i polinomî di EULERO, soddisfacenti alla relazione

$$\frac{1}{2}(f(x+1)+f(x))=x^n:$$

gli uni e gli altri dotati di numerose ed eleganti proprietà: ad essi il recente libro del NÖRLUND dedica un interessante Capitolo. Ricorderò infine che facendo $f(x)=\log x$, la formula sommatoria dà luogo a quella di STIRLING, ben nota ai cultori della matematica statistica.

5. Quando nella relazione

$$(a) \qquad F(x+1)-F(x)=f(x),$$

$f(x)$ si riguarda come data ed $F(x)$ come incognita, abbiamo il primo e fondamentale esempio di un'equazione alle differenze, ed il nucleo, per così dire, di quelle moderne ricerche di cui parlerò più avanti. La risoluzione, od integrazione delle equazioni alle differenze, cioè delle relazioni fra una o più funzioni incognite e le loro differenze finite dei varî ordini ed un certo numero di funzioni note, costituisce il capitolo al certo più importante del nostro calcolo: ad esse si riconducono tutte quelle questioni in cui ha parte essenziale la ricorrenza. Tacendo degli studî, fino ad ora meno completi ed organici, sulle equazioni di forma qualunque, dirò delle equazioni lineari, le più interessanti, le più note, e paragonabili per importanza alle equazioni lineari differenziali.

Tipo dell'equazione lineare è

$$(b) \qquad a_0(x)\varphi(x+m)+a_1(x)\varphi(x+m-1)+\dots a_m(x)\varphi(x)=\begin{cases}0\\ f(x),\end{cases}$$

la prima omogenea, la seconda non omogenea o completa; $f(x)$ è funzione data, $\varphi(x)$ è l'incognita. Le soluzioni ne sono dette « integrali ». Il primo membro è un operatore manifestamente distributivo, che, usando il simbolo θ di CASORATI, si scrive:

$$(c) \qquad \Phi\equiv a_0(x)\theta^m+a_1(x)\theta^{m-1}+\dots+a_m(x)\theta.$$

Nelle ricerche moderne, di cui si dirà fra poco, x è una variabile generalmente complessa: ma in un primo stadio, x si è limitato alla successione dei numeri interi, avendo così, in (b), un'equazione ricorrente propriamente detta. Storicamente e praticamente importante è il caso dell'equazione di secondo ordine omogenea

$$(d) \qquad \varphi(x+2)+a_1(x)\varphi(x+1)+a_2\varphi(x)=0,$$

base dell'importante teoria, dovuta per primo all'italiano CATALDI, delle frazioni continue.

Nello studio delle equazioni omogenee è fondamentale un teorema di POINCARÉ, che permette di determinare i limiti del rapporto $\frac{\varphi(x+n)}{\varphi(x+n-1)}$ per $n \to \infty$. Nell'integrale per il quale questo limite ha il minimo valore, ho riscontrato proprietà speciali, ragione per cui ho proposto per esso il nome di *integrale distinto*: per il caso $n=2$, codesto integrale vale a determinare il valore della frazione continua, mentre per $n>2$ ne dà la generalizzazione, già tentata in varie direzioni da JACOBI e da HEINE. Il concetto di integrale distinto mi ha anche permesso di estendere agli sviluppi di una funzione analitica secondo serie procedenti per gli elementi di un sistema ricorrente le condizioni note per la sviluppabilità secondo i denominatori delle ridotte di una frazione continua algebrica, e di porre in evidenza le proprietà asintotiche dei sistemi ricorrenti costituiti dai coefficienti dello sviluppo di TAYLOR degli integrali delle equazioni differenziali lineari di tipo regolare.

6. Sugli operatori (c), ai quali è stato dato il nome di *forme lineari alle differenze*, si è potuto costruire un'Algebra, la cui origine si ha in lavori del LIBRI. Questa Algebra è associativa, ed anche commutativa se i coefficienti di (c) sono costanti; essa offre molti e notevoli raffronti colla teoria delle funzioni razionali: divisibilità, scomposizione in fattori che permette la riduzione dell'ordine dell'equazione, regola di RUFFINI, ecc. [1]. Ma vi è di più: stabilita l'esistenza di un sistema fondamentale di integrali per un'equazione omogenea (b), si è potuto estendere a questo campo la teoria analoga a quella di GALOIS e che PICARD e VESSIOT avevano data per le equazioni differenziali lineari, e così, con BORTOLOTTI e poi con GULDBERG, definire il gruppo di una equazione alle differenze e fondare il concetto di irriducibilità.

7. Ma la direttiva odierna per l'integrazione delle equazioni, sopratutto lineari, direttiva che ha fatto entrare con successo ed in modo organico questo argomento nel quadro generale della teoria delle funzioni analitiche, consiste nel riguardare le equa-

[1] Su questo argomento, v. il Cap. X della mia opera, in collaborazione con U. AMALDI: *Le operazioni distributive*, Bologna, 1901. V. anche WALLENBERG e GULDBERG: *Theorie der lineare Differenzengleichungen*, Leipzig, 1911.

zioni (a) e (b), più che come semplici relazioni di ricorrenza, come vere e proprie condizioni funzionali: la x non è più il semplice termine di una progressione aritmetica, ma acquista il carattere di variabile complessa ed impone l'analiticità alle soluzioni dell'equazione.

Numerosi autori si sono cimentati e si cimentano in questo nuovo indirizzo che va mostrandosi ognora più fecondo ed atto a completare in punti essenziali la conoscenza di notevoli funzioni analitiche ed a scoprirne nuove classi. Citerò MELLIN, NIELSEN, VAN VLECK, BIRKHOFF, CAERMICHAEL, PERRON, HILB, ecc., oltre ad alcuni miei lavori; ma sopratutto NÖRLUND, che con un'opera magistrale [1] dà testimonianza dell'interesse destato da questo ramo dell'Analisi in un periodo recente.

8. Un primo esempio tipico di questo indirizzo funzionale è dato dall'equazione

$$f(x+1)=xf(x) \tag{e}$$

che, nel campo aritmetico, dà l'elementare fattoriale: come ha mostrato il WEIERSTRASS in una celebre Memoria, basta l'aggiunta di un'ovvia condizione asintotica perchè questa equazione valga a definire una delle trascendenti più segnalate dell'Analisi: la $\Gamma(x)$ od integrale euleriano di seconda specie, che, come è ben noto, si presenta spontaneamente nelle più svariate questioni. Essa viene a costituire l'elemento essenziale nella costruzione degli integrali analitici delle equazioni lineari omogenee alle differenze a coefficienti razionali: classe notevole di equazioni, cui soddisfano, come funzioni dell'indice, i coefficienti degli sviluppi in serie di potenze, sia effettivi, sia asintotici, delle equazioni lineari differenziali regolari. E fra queste due classi di equazioni, differenziali ed alle differenze, intercede una specie di dualità che si manifesta dapprima negli studî sulle funzioni ipergeometriche ed in cui la funzione Γ appare come la correlativa della funzione esponenziale [2].

E, nonostante la spontanea, costante e necessaria presenza della funzione Γ nell'analisi, essa è *trascendentalmente trascendente*, vale a dire non soddisfa ad alcuna equazione algebrica differenziale: fatto che ha un riscontro nell'Aritmetica, in cui numeri

(1) *Differenzenrechnung*, Berlin, 1924.

(2) V. su ciò due Note: *Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate*, nei Rend. dell'Accademia dei Lincei, 1888; e la Memoria: *Sur la génération des systèmes récurrents*, etc., Acta Mathematica, T. 16, 1892.

di somma e di necessaria importanza, come e e π, non appartengono alla classe dei numeri algebrici.

L'accennata dualità trova la sua effettiva rappresentazione nella nota trasformazione di LAPLACE-ABEL, le cui applicazioni sono state tanto proficue e numerose nelle moderne ricerche della teoria delle funzioni, e per la quale basta notare che essa trasforma l'operazione θ (état varié) nella operazione di moltiplicazione per x, per intendere l'efficacia del suo impiego nel Calcolo delle differenze finite; per mezzo di questa trasformazione si giunge in modo ovvio agli sviluppi, in gran parte dati da NIELSEN, siano effettivi, siano asintotici, delle predette equazioni omogenee in serie di fattoriali.

La l'integrazione delle equazioni non omogenee, di cui la (a) dà il primo e più istruttivo esempio, conduce, nel campo delle funzioni analitiche, a conseguenze di non minore rilievo. Una tale equazione, il cui primo membro è un'operazione Φ, e che quindi può scriversi

$$\Phi(\varphi)=f,$$

corrisponde dunque alla ricerca delle funzioni rappresentabili col simbolo Φ^{-1}. Qui si presentano di nuovo, e quasi come correlativi delle serie di potenze, gli sviluppi in serie di fattoriali della forma

$$\sum \frac{a_n}{x(x+1)\dots(x+n)},$$

per questi, si dimostra che i campi di convergenza sono semipiani; si danno, con BOHR e NÖRLUND, condizioni di sviluppabilità di una funzione sotto ad una tale forma; si riconoscono i casi in cui esse hanno valore di rappresentazione asintotica. Ma ciò che vi è di notevole nelle ricerche sull'argomento è il concetto di *soluzione principale* svolto dal NÖRLUND. L'operazione Φ^{-1} non è certamente univoca; ad una sua determinazione può essere aggiunta una qualunque delle soluzioni, generalmente in numero infinito, dell'equazione $\Phi=0$. Però, fra queste determinazioni, il matematico danese ne distingue una cui competono proprietà speciali. Già per l'equazione (a), nel caso particolare in cui $f(x)$ è una funzione intera, una soluzione così specializzata era stata data da GUICHARD: più indietro ancora, fino dal 1888, avevo io pure incontrato simili soluzioni in una Memoria ora ristampata negli « Acta Mathematica ».

Il Nörlund scrive l'equazione (a) nella forma più genera

$$(f) \qquad \frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$$

dove l'incremento h (*Spanne*) può essere considerata variabil considera la somma

$$-h(f(x)+f(x+h)+f(x+2h)+\dots f(x+(n-1)h)$$

e ne cerca il limite per $n\to\infty$. Quando questo limite è espres da una serie convergente, è questa che dà la soluzione princ pale: ma nella generalità dei casi, dipendenti dalla natura di $f($ la serie diverge: però anche allora, mercè l'impiego di un co veniente metodo di sommazione, si giunge a dimostrare l'es stenza della soluzione principale sotto ipotesi assai poco restri tive. Le proprietà che distinguono questa soluzione $F(x|h)$ so varie: oltre alla formula semplice, eppure notevole

$$\sum_{s=0}^{m-1} F\left(x+\frac{sh}{m}\,\middle|\, h\right)=mF\left(x\,\middle|\,\frac{h}{m}\right),$$

cui essa soddisfa, notiamo la proprietà, per essa caratteristica, avere una derivata m^{sima} tendente a limite finito per $x\to+\infty$ tale è $f^{(m)}(x)$; se $f(x)$ è analitica, l'analiticità di $F(x)$, la poss bilità di continuazione, la determinazione delle singolarità: i ultima analisi, fra le soluzioni di (f) la principale è quella pi strettamente connessa col campo funzionale cui appartiene $f(x$ Infine, la forma del primo membro di (f), permettendo di fa tendere h a zero, rende possibile il passaggio ad una teoria an loga nel campo delle equazioni differenziali.

10. Vi sarebbero da menzionare altre ricerche recenti: d Birkhoff, che riconduce un'equazione lineare alle differenze ordine superiore ad un sistema di equazioni del primo ordin traendo vantaggio dal calcolo delle matrici; di Hilb, che tra sporta lo studio delle nostre equazioni ad equazioni differenzia lineari di ordine infinito. Ma quanto ho detto sarà valso, sper a persuadere che il Calcolo delle differenze non è, come da talun forse si è creduto, un ramo appassito del tronco dell'Analisi che esso offre utilità tecnica non meno che interesse speculativ che, infine, il trionfo del discontinuo nella Filosofia natural colla meccanica statistica, colle nuove vedute sulla costituzion atomica della materia, colla teoria dei quanta, ecc., non può non portare ad una rivalutazione di quel ramo dell'Analisi che si distingue appunto per il variare discontinuo dell'argomento. Concluderò con queste parole dell'Autore più volte citato, del NÖRLUND: « Si vede che i problemi del Calcolo delle differenze considerati « fino ad ora sono molto vasti. Ma non si è fatto che un primo « passo. Le svariatissime condizioni che possono determinare le « soluzioni delle equazioni alle differenze chiamano ancora nume- « rose ricerche. Queste teorie prendono un'importanza sempre « crescente dal momento in cui si è dovuto chiedere se le leggi « del moto potranno ancora essere espresse da equazioni diffe- « renziali, o se la discontinuità regnerà sull'universo fisico ».

S. PINCHERLE