
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIUSEPPE SCORZA

A proposito di un lemma del Minkowski

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 5 (1926), n.5, p. 229–231.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_5_229_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_5_229_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1926.

A proposito di un lemma del Minkowski.

Nota di GIUSEPPE SCORZA (a Napoli).

Nella sua Nota: *Zur Theorie der Einheiten in den algebraischen Zahlkörpern* (Gött. Nach. 1900, pp. 90-93) il MINKOWSKI è riuscito a raggiungere una grande semplificazione delle classiche ricerche del DIRICHLET sulla struttura del gruppo delle unità di un corpo algebrico, poggiandosi sul seguente lemma:

Il determinante della matrice

$$(1) \quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & -a_{1,2} & \dots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & -a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

è positivo, se è

$$a_{i,j} > 0 \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

e

$$(2) \quad a_{i,i} > a_{i,1} + \dots + a_{i,i-1} + a_{i,i+1} + \dots + a_{i,n} \quad (i = 1, \dots, n).$$

La dimostrazione che egli brevemente ne accenna è abbastanza rapida e semplice, ma può esser resa più elementare, procedendo nel modo che segue.

Giacchè il teorema è evidente per $n=1$, esso sarà dimostrato anche per $n > 1$, se facciamo vedere che esso sussiste per le matrici d'ordine n , quando sia supposto vero per quelle d'ordine $n-1$.

A tale scopo si osservi che, indicato con D il determinante della (1), una facile trasformazione dà subito

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ -a_{2,1} & a_{2,2} - a_{2,1} \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} & \dots & -a_{2,n} - a_{2,1} \frac{a_{1,n}}{a_{1,1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} - a_{n,1} \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} & \dots & a_{n,n} - a_{n,1} \frac{a_{1,n}}{a_{1,1}} \end{vmatrix};$$

di guisa che D è il prodotto di $a_{1,1}$ per il determinante della

matrice

$$(3) \begin{vmatrix} a_{2,2} - a_{2,1} \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} & -a_{2,3} - a_{2,1} \frac{a_{1,3}}{a_{1,1}} & \dots & -a_{2,n} - a_{2,1} \frac{a_{1,n}}{a_{1,1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{i,2} - a_{i,1} \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} & a_{i,i} - a_{i,1} \frac{a_{1,i}}{a_{1,1}} & \dots & -a_{i,n} - a_{i,1} \frac{a_{1,n}}{a_{1,1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n,2} - a_{n,1} \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} & -a_{n,3} - a_{n,1} \frac{a_{1,3}}{a_{1,1}} & \dots & a_{n,n} - a_{n,1} \frac{a_{1,n}}{a_{1,1}} \end{vmatrix}.$$

Ora $a_{1,1}$ è positivo, dunque tutto si riduce a dimostrare che la matrice (3) soddisfa alle condizioni di cui nell'enunciato.

È chiaro in primo luogo che gli elementi non principali sono negativi; mentre gli elementi principali sono positivi, perchè dalla (2), per $i=2, \dots, n$, si trae

$$a_{i,i} > a_{i,1} \quad \text{ed} \quad a_{1,1} > a_{1,i}$$

e quindi è

$$a_{i,i} > a_{i,1} \frac{a_{1,i}}{a_{1,1}} \quad \text{ossia} \quad a_{i,i} - a_{i,1} \frac{a_{1,i}}{a_{1,1}} > 0.$$

Non resta dunque se non far vedere che in ciascuna riga della matrice (3) l'elemento principale supera la somma degli opposti di tutti gli altri; ossia che, per $i=2, \dots, n$, è

$$(4) \quad a_{i,i} - a_{i,1} \frac{a_{1,i}}{a_{1,1}} > a_{i,1} \frac{a_{1,2} + \dots + a_{1,i-1} + a_{1,i+1} + \dots + a_{1,n}}{a_{1,1}} + \\ + a_{i,2} + \dots + a_{i,i-1} + a_{i,i+1} + \dots + a_{i,n}.$$

Ma ciò è immediato, perchè da

$$a_{1,1} > a_{1,2} + \dots + a_{1,i} + \dots + a_{1,n},$$

si trae

$$a_{i,1} > a_{i,1} \frac{a_{1,2} + \dots + a_{1,i} + \dots + a_{1,n}}{a_{1,1}}, \quad (i=2, \dots, n),$$

quindi è

$$a_{i,i} > a_{i,1} + \dots + a_{i,i-1} + a_{i,i+1} + \dots + a_{i,n} > \\ > a_{i,1} \frac{a_{1,2} + \dots + a_{1,i} + \dots + a_{1,n}}{a_{1,1}} + a_{i,2} + \dots + a_{i,i-1} + a_{i,i+1} + \dots + a_{i,n},$$

da cui si ricava subito la (4), trasportando a primo membro il termine $a_{i,1} \frac{a_{1,i}}{a_{1,1}}$.

Osservazione. Percorrendo il ragionamento compiuto si vede che per arrivare alle conclusioni cui si mira, non tutte le ipotesi dell'enunciato sono strettamente necessarie. Esso resta immutato, se si suppone che delle n disuguaglianze (2) le ultime $n-1$ siano sostituite dalle altre

$$a_{i,i} \geq a_{i,1} + \dots + a_{i,i-1} + a_{i,i+1} + \dots + a_{i,n} \quad (i=2, \dots, n).$$

Ciò dimostra che al lemma del MINKOWSKI può essere data una maggiore estensione; ossia, che sussiste il seguente teorema:

Il determinante della matrice (1) è positivo, se è

$$a_{i,j} > 0 \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

e

$$(5) \quad a_{i,i} \geq a_{i,1} + \dots + a_{i,i-1} + a_{i,i+1} + \dots + a_{i,n} \quad (i=1, \dots, n),$$

una almeno di quest'ultime disuguaglianze sussistendo nel senso forte.

Come è chiaro la condizione che una almeno delle (5) sia soddisfatta in senso forte non può essere soppressa senza compromettere la verità del teorema. Se in tutte le (5) valesse il segno di eguaglianza, la somma delle colonne della matrice (1) sarebbe nulla e tale sarebbe pure il suo determinante.

Morano Calabro, 31 agosto 1926.