Bollettino Unione Matematica Italiana

Renato Caccioppoli

Sull'equazione funzionale $f(x+y) = f(x) + f(y)$

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **5** (1926), n.5, p. 227–228.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_5_227_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1926.

Sull'equazione funzionale $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Nota di RENATO CACCIOPPOLI (a Napoli).

È noto che una soluzione *discontinua* dell'equazione funzionale

$$(1) \qquad f(x + y) = f(x) + f(x)$$

non può essere una funzione misurabile secondo LEBESGUE.

Nella presente Nota questo risultato è conseguito assai semplicemente e gli si conferisce così anche maggior portata, in quanto si fa appello soltanto ad una proprietà fondamentale relativa ad una definizione generale della misura; proprietà verificata in particolare dalla misura lebesguiana.

Questa proprietà è l'additività *in senso esteso* (cioè per un numero finito o infinito di addendi). La si può enunciare sotto questa forma: Se una successione di insiemi I_1, I_2, I_3,.... *invade* un insieme I, si ha $\lim\limits_{n \to \infty} \text{mis}\, I_n = \text{mis}\, I$.

È noto che una soluzione discontinua della (1) è non limitata in qualsiasi intervallo finito. In una Nota precedente [1] ho incidentalmente rilevato come, di più, una tale funzione debba assumere in qualsiasi intervallo valori prossimi quanto si voglia a qualunque numero assegnato.

Consideriamo la funzione f in un intervallo (a, b). Sia (a', b') un qualunque intervallo interno ad (a, b).

Supposta f misurabile, si potranno determinare due numeri α_1 e β_1 $(\alpha_1 < \beta_1)$ tali che l'insieme $I_1(\alpha_1 \leq f \leq \beta_1)$ di (a', b') abbia misura non nulla; altrimenti, per l'ipotesi fatta sul criterio di misura adottato, l'intervallo (a', b') avrebbe misura nulla, e conseguentemente qualunque insieme limitato avrebbe anch'esso misura nulla.

Giusta l'osservazione precedente si potrà poi trovare un punto a'', prossimo quanto si voglia ad a', in cui sia $f = \alpha_2 > \beta_1$. Allora, nell'insieme I_2 ottenuto da I_1 con la traslazione di ampiezza $a'' - a'$, sarà $\alpha_2 \leq f \leq \beta_2 = \alpha_2 + \beta_1 - \alpha_1$. L'insieme I_2 dovrà avere la stessa misura di I_1, cui è congruente, e si potrà supporre anch'esso interno ad (a, b).

Analogamente si potrà dedurre da I_2 un insieme congruente I_3, interno ad (a, b), per i punti del quale si abbia $\alpha_3 \leq f \leq \beta_3 = \beta_2 - \alpha_2 + \alpha_3$, essendo $\alpha_3 > \beta_2$.

Proseguendo così, potrà costruirsi una successione di insiemi congruenti $I_1, I_2, I_3, \ldots$ tutti interni ad (a, b), ed in cui i valori di f appartengano rispettivamente agli intervalli, esterni gli uni agli altri, (α_1, β_1), (α_2, β_2), $(\alpha_3, \beta_3), \ldots$.

Questi insiemi avranno dunque tutti la stessa misura, e saranno a due a due privi di punti comuni. Ma ciò non è possibile, dovendo essere, per l'ipotesi fatta

$$\text{mis}\,(a, b) \geq \text{mis}\, I_1 + \text{mis}\, I_2 + \text{mis}\, I_3 + \ldots.$$

La funzione f non è dunque misurabile con il criterio generale adottato; in particolare, non è misurabile secondo LEBESGUE.

In un sistema di misure per cui f riesca misurabile, dovrà essere in qualunque intervallo (a, b), e quali che siano i numeri α e β

$$\text{mis}\, I(\alpha \leq f \leq \beta) = 0.$$

Napoli, 10 luglio 1926.

[1] *Sopra i funzionali distributivi.* Questo « Bollettino », giugno 1926.