
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

PIETRO TORTORICI

Sulla trasformazione integrale di Moutard

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 5 (1926), n.5, p. 220–227.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_5_220_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_5_220_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sulla trasformazione integrale di Moutard.

Nota di PIETRO TORTORICI (a Palermo).

1. Mi propongo d' esporre qui un teorema sulla trasformazione integrale di MOUTARD, la dimostrazione del quale non è immediata mentre è interessante, a mio avviso, per le sue conseguenze.

Se l'equazione

$$\theta_{uv} = M\theta, \quad (M \neq 0)$$

mediante due soluzioni particolari (non nulle) ρ , σ si trasforma, secondo Moutard, in una medesima equazione:

$$\bar{\theta}_{uv} = \bar{M}\bar{\theta}$$

e se le trasformate di una sua soluzione particolare ζ mediante le funzioni ρ , σ ordinatamente sono due funzioni opposte $\bar{\zeta}$, $-\bar{\zeta}$, si ha necessariamente:

$$d\left(\frac{\rho}{\sigma}\right) = 0, \quad d\left(\frac{\zeta}{\rho}\right) = 0, \quad d\left(\frac{\zeta}{\sigma}\right) = 0.$$

Ammessi che esistano quattro funzioni ζ , ρ , σ , $\bar{\zeta}$ delle variabili u , v soddisfacenti alle condizioni indicate nell'enunciato,

devono, come è ben noto, aver luogo simultaneamente le relazioni:

$$(1) \quad \frac{1}{\zeta} \zeta_{uv} = \frac{1}{\rho} \rho_{uv}, \quad \frac{1}{\bar{\zeta}} \zeta_{uv} = \frac{1}{\sigma} \sigma_{uv},$$

$$(2) \quad \rho \left(\frac{1}{\rho} \right)_{uv} = \sigma \left(\frac{1}{\sigma} \right)_{uv} = \frac{1}{\zeta} \bar{\zeta}_{uv},$$

$$(3) \quad \rho(\zeta + \bar{\zeta})_u = (\zeta - \bar{\zeta}) \rho_u, \quad \rho(\zeta - \bar{\zeta})_v = (\zeta + \bar{\zeta}) \rho_v,$$

$$(4) \quad \sigma(\zeta - \bar{\zeta})_u = (\zeta + \bar{\zeta}) \sigma_u, \quad \sigma(\zeta + \bar{\zeta})_v = (\zeta - \bar{\zeta}) \sigma_v.$$

Escludendo il caso, privo di qualsiasi interesse, che le funzioni ζ e $\bar{\zeta}$ siano ambedue nulle, si cominci dall'osservare che non può aversi

$$\zeta + \bar{\zeta} = 0$$

nè

$$\zeta - \bar{\zeta} = 0.$$

Nel primo caso infatti, come nel secondo, si deduce dalle (3), (4) che una delle funzioni ρ , σ almeno deve essere nulla ciò che è escluso.

Le (3), (4) allora possono mettersi sotto la forma equivalente:

$$(3') \quad \frac{\rho_u}{\rho} = \frac{(\zeta + \bar{\zeta})_u}{\zeta - \bar{\zeta}}, \quad \frac{\rho_v}{\rho} = \frac{(\zeta - \bar{\zeta})_v}{\zeta + \bar{\zeta}},$$

$$(4') \quad \frac{\sigma_u}{\sigma} = \frac{(\zeta - \bar{\zeta})_u}{\zeta + \bar{\zeta}}, \quad \frac{\sigma_v}{\sigma} = \frac{(\zeta + \bar{\zeta})_v}{\zeta - \bar{\zeta}}.$$

La condizione

$$\rho \left(\frac{1}{\rho} \right)_{uv} = \sigma \left(\frac{1}{\sigma} \right)_{uv},$$

tenuto conto delle (1), implica l'altra:

$$\frac{\rho_u}{\rho} \cdot \frac{\rho_v}{\rho} - \frac{\sigma_u}{\sigma} \cdot \frac{\sigma_v}{\sigma} = 0$$

la quale, in forza di (3), (4), scrivesi:

$$\bar{\zeta}_u \zeta_v - \bar{\zeta}_v \zeta_u = 0$$

e, riguardata come una condizione sulla incognita $\bar{\zeta}$, fornisce:

$$\bar{\zeta} = f(\zeta)$$

con f simbolo di funzione arbitraria che si tratterà ora, se è possibile, di determinare effettivamente in modo da soddisfare a tutte le relazioni precedenti.

Supposto che f_0 sia una particolare funzione tale che, ponendo

$$\bar{\zeta}_0 = f_0(\zeta),$$

$\bar{\zeta}_0$ sia la trasformata di ζ mediante ρ e $-\bar{\zeta}_0$ la trasformata di ζ mediante σ , si osservi che ogni altra soluzione $\bar{\zeta}$ delle equazioni (3) è data dalla formula:

$$\bar{\zeta} = \bar{\zeta}_0 + \frac{a}{\rho}, \quad (a \text{ costante arbitraria})$$

e, medesimamente, ogni altra soluzione $\bar{\zeta}$ delle equazioni (4) è data dalla formula:

$$\bar{\zeta} = \bar{\zeta}_0 + \frac{b}{\sigma}, \quad (b \text{ costante arbitraria})$$

talmente che, se, oltre $\bar{\zeta}_0$, esiste un'altra funzione $\bar{\zeta}$ avente rispetto a ζ , ρ , σ le medesime proprietà indicate di $\bar{\zeta}_0$, scegliendo opportunamente le costanti a , b deve essere possibile porre:

$$\bar{\zeta}_0 + \frac{a}{\rho} = \bar{\zeta}_0 + \frac{b}{\sigma} = f(\zeta).$$

Si deduce allora:

$$\rho = \frac{a}{f(\zeta) - f_0(\zeta)}, \quad \sigma = \frac{b}{f(\zeta) - f_0(\zeta)}$$

vale a dire: *a meno di un fattore costante, ρ e σ sono la medesima funzione di ζ .*

Se questa condizione non è soddisfatta, cioè se il rapporto $\frac{\rho}{\sigma}$ non è costante, può esistere al più la sola funzione ζ_0 possedente le proprietà già indicate, ma si dimostrerà che neppure questa esiste, perchè l'esistenza della funzione ζ_0 implica ancora che il rapporto $\frac{\rho}{\sigma}$ sia costante. Invero, se la quaderna di funzioni ζ , ρ , σ , $\bar{\zeta}_0$ possiede le proprietà indicate dal teorema, la quaderna $k\zeta$, ρ , σ , $k\bar{\zeta}_0$ (con k costante arbitraria) si trova pure nelle stesse condizioni, essendo che, se $\bar{\zeta}_0$ e $-\bar{\zeta}_0$ sono le trasformate di ζ mediante ρ e σ , allora $k\bar{\zeta}_0$ e $-k\bar{\zeta}_0$ sono ordinatamente le trasformate di $k\zeta$ mediante le stesse funzioni e deve aversi dunque:

$$k\bar{\zeta}_0 = kf_0(\zeta) = f_0(k\zeta).$$

L'equazione funzionale:

$$kf_0(\zeta) = f_0(k\zeta)$$

induce la relazione:

$$f_0(\zeta) = h\zeta \quad [h = f_0(1)]$$

e, per quanto esposto in principio, essendo $\bar{\zeta}_0$ diversa da ζ e da $-\zeta$, deve essere:

$$h^2 \neq 1.$$

Ma le (3') scrivonsi ora:

$$\frac{\rho_u}{\rho} = \frac{1 + h \frac{\zeta_u}{\zeta}}{1 - h \frac{\zeta}{\zeta}}, \quad \frac{\rho_v}{\rho} = \frac{1 - h \frac{\zeta_v}{\zeta}}{1 + h \frac{\zeta}{\zeta}}$$

e queste dànno successivamente

$$h = 0, \quad \bar{\zeta}_0 = 0.$$

Allora ρ e σ non possono differire che per un fattore costante da ζ e quindi si ha

$$d\left(\frac{\rho}{\zeta}\right) = d\left(\frac{\sigma}{\zeta}\right) = d\left(\frac{\bar{\zeta}}{\zeta}\right) = 0.$$

Adunque la condizione

$$d\left(\frac{\rho}{\zeta}\right) = 0$$

è necessaria per l'esistenza delle quattro funzioni ζ , ρ , σ , $\bar{\zeta}$ possedenti le proprietà dette. Essendo c una costante, pongasi:

$$\sigma = c\rho,$$

scritte le (3), (4) sotto la forma equivalente:

$$\begin{aligned} (\rho\bar{\zeta})_u &= -\rho^2\left(\frac{\bar{\zeta}}{\rho}\right)_u, & (\rho\bar{\zeta})_v &= \rho^2\left(\frac{\bar{\zeta}}{\rho}\right)_v \\ -(\sigma\bar{\zeta})_u &= -\sigma^2\left(\frac{\bar{\zeta}}{\sigma}\right)_u, & -(\sigma\bar{\zeta})_v &= \sigma^2\left(\frac{\bar{\zeta}}{\sigma}\right)_v, \end{aligned}$$

moltiplicando le prime due per c e sommando ordinatamente con le sottostanti si ha:

$$\left(\frac{\bar{\zeta}}{\rho}\right)_u = 0, \quad \left(\frac{\bar{\zeta}}{\rho}\right)_v = 0$$

e quindi ancora

$$d\left(\frac{\zeta}{\rho}\right) = 0, \quad d\left(\frac{\zeta}{\sigma}\right) = \frac{1}{c} d\left(\frac{\zeta}{\sigma}\right) = 0.$$

Il teorema è dunque dimostrato.

2. Effettivamente poi, denotando con k ed h due costanti, se ponesi

$$\rho = k\zeta, \quad \sigma = h\zeta,$$

la classe delle soluzioni trasformate di ζ mediante ρ coincide con quella delle trasformate mediante σ e ciascuna di queste soluzioni trasformate è della forma

$$\frac{c}{\zeta}$$

con c costante arbitraria e però le due funzioni opposte $\frac{c}{\zeta}$, $-\frac{c}{\zeta}$ possono riguardare come le trasformate di ζ , mediante ρ e σ ordinatamente.

3. Esporrò ora una applicazione, che credo notevole, del teorema dimostrato. In alcuni miei studi di applicabilità, mi sono imbattuto in certe coppie di congruenze W le quali hanno per falde focali la medesima coppia di superficie, collocate però, in ciascuna congruenza, in posizione relativa diversa. Il teorema che precede si presta alla determinazione di tutte le congruenze di questa specie, aventi cioè le falde focali ordinatamente uguali.

Anzitutto si ricordi che data l'equazione di LAPLACE:

$$(5) \quad \theta_{uv} = M\theta,$$

fissata arbitrariamente una terna ordinata (ξ, η, ζ) di sue soluzioni linearmente indipendenti, le formule (di LELIEUVRE)

$$(6) \quad x_u = - \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \eta_u & \zeta_u \end{vmatrix}, \quad x_v = \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \eta_v & \zeta_v \end{vmatrix}$$

ed analoghe definiscono per quadrature (e quindi a meno di una traslazione) una superficie S riferita alle sue asintotiche u, v .

Viceversa: assegnata una superficie S riferita alle sue asintotiche u, v , a meno di un cambiamento dei parametri di queste linee, sono perfettamente determinati l'invariante M e le soluzioni ξ, η, ζ ; ma non si può asserire che, assegnata la (5), a terne ordinate diverse di soluzioni linearmente indipendenti (ogni terna,

essendo fissata anche a meno di un cambiamento di segno a tutte le tre funzioni che la costituiscono) corrispondano, mediante le formule (6) di LELIEUVRE, superficie diverse a meno di un movimento nello spazio. Infatti due superficie uguali, collocate nello spazio in modo di non potersi sovrapporre con una semplice traslazione, devono ottenersi da terne distinte di soluzioni della corrispondente equazione (5) associata alle asintotiche.

Poichè, nell'analisi che qui si vuol fare, è lecito prescindere da traslazioni, si consideri una medesima superficie in due posizioni diverse, ma tali che si passi dall'una all'altra mediante una rotazione pura che, senza limitare la generalità, si può supporre avvenga attorno all'asse delle z . Si distingua con S_1 , $\bar{S}_1$ la superficie in considerazione nelle due posizioni, siano poi (ξ_1, η_1, ζ_1) , $(\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1, \bar{\zeta}_1)$ le due corrispondenti terne di coseni normalizzati delle rispettive normali; poichè fra le coordinate (x_1, y_1, z_1) , $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$ di un medesimo punto della superficie nelle due posizioni intercedono le relazioni:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha, \\ \bar{y}_1 &= -x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha, \\ \bar{z}_1 &= z_1,\end{aligned}\quad (0 < \alpha < 2\pi)$$

con α costante, si deduce:

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_1 &= \xi_1 \cos \alpha + \eta_1 \sin \alpha, \\ \bar{\eta}_1 &= -\xi_1 \sin \alpha + \eta_1 \cos \alpha, \\ \bar{\zeta}_1 &= \zeta_1,\end{aligned}$$

e le due terne diverse (ξ_1, η_1, ζ_1) , $(\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1, \bar{\zeta}_1)$ di soluzioni della corrispondente equazione di LAPLACE definiscono la stessa superficie.

Ciò posto, sia data una superficie S riferita alle sue asintotiche e siano ξ, η, ζ i coseni normalizzati della sua normale.

Sia S_1 contigua a S per trasformazione di MOUTARD vale a dire sia possibile mediante una traslazione collocare S ed S_1 in tale posizione relativa da costituire le falde focali di una congruenza W e si ricerchi se non sia possibile, pure mediante una traslazione, collocare $\bar{S}_1$ in tale posizione relativa rispetto a S da costituire con questa le falde di una congruenza W .

Analiticamente ciò equivale al problema seguente:

Amesso che ξ_1, η_1, ζ_1 siano ordinatamente le trasformate di ξ, η, ζ mediante una soluzione ρ della equazione

$$\theta_{uv} = M\theta$$

associata alle asintotiche di S , decidere in quali condizioni $\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1, \bar{\zeta}_1$ (ovvero $-\xi_1, -\eta_1, -\zeta_1$) siano ordinatamente le trasformate di ξ, η, ζ mediante una soluzione σ della medesima equazione.

La terna $(\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1, \bar{\zeta}_1)$ è costituita da funzioni ordinatamente trasformate di ξ, η, ζ solo se $\alpha = 0$.

Ciò è evidente, perchè avendosi:

$$\bar{\xi}_1 = \xi_1$$

si ha:

$$d\left(\frac{\rho}{\sigma}\right) = 0$$

e però:

$$\bar{\xi}_1 = \xi_1, \quad \bar{\eta}_1 = \eta_1,$$

uguaglianze che implicano appunto $\alpha = 0$. Questo caso è privo d'interesse.

Volendo invece che la terna $(-\bar{\xi}_1, -\bar{\eta}_1, -\bar{\zeta}_1)$ sia costituita da funzioni ordinatamente trasformate di ξ, η, ζ , poichè ζ ammette come funzioni trasformate $\bar{\xi}_1$ e $-\bar{\zeta}_1$ si è nelle condizioni del teorema precedente e quindi si ha

$$\rho = h\zeta, \quad \sigma = k\zeta$$

con k ed h costanti.

Allora si ha ancora

$$-\bar{\xi}_1 = \xi_1, \quad -\bar{\eta}_1 = \eta_1$$

e queste implicano:

$$\alpha = \pi.$$

Inversamente, se a funzione trasformatrice assumesi $h\zeta$ (h costante), può assumersi come trasformata di ζ qualunque funzione della forma $\frac{a}{\zeta}$ con a costante e, dette ξ_1, η_1 le trasformate di ξ, η , posto:

$$\bar{\xi}_1 = \frac{a}{\xi}, \quad \bar{\zeta}_1 = \frac{-a}{\zeta}$$

le due terne $(\bar{\xi}, \eta_1, \zeta_1)$, $(\bar{\xi}_1, \eta_1, \bar{\zeta}_1)$ definiscono, secondo LELIEUVRE, due superficie bensì uguali ma non sovrapponibili per traslazione e, corrispondentemente, si hanno due congruenze W distinte aventi le falde focali ordinatamente uguali.

4. Poichè la funzione trasformatrice è proporzionale per un fattore costante a ζ , ne consegue che le corrispondenti deformazioni infinitesime sono movimenti puri anzi è immediato che si tratta di due movimenti elicoidali attorno all'asse delle z , l'uno destrorso, l'altro sinistrorso con inclinazioni opposte sul piano xy . Ciò risulta subito considerando, per i due movimenti, le superficie (piane) corrispondenti per ortogonalità di elementi alla S .

È poi quasi evidente che, data S , esiste una classe cinque volte infinita di coppie di congruenze W distinte, aventi per prima falda S e le seconde falde uguali fra loro (a meno di un movimento). Infatti, data S , si può fissare arbitrariamente l'asse del movimento in ∞^4 modi e, per ogni asse, si dispone di una semplice infinità di movimenti elicoidali.

In altre parole: ad ogni movimento rigido di S , può associarsene un altro in modo che le corrispondenti congruenze W abbiano le seconde falde focali uguali e, variando S , si ottengono così tutte le coppie di congruenze W distinte e a falde uguali.

Mostrerò altrove che, fra queste coppie di congruenze, ne esistono a falde applicabili sulle quadriche.

Palermo, gennaio 1926.