Bollettino Unione Matematica Italiana

Francesco Sbrana

Sull'equazione differenziale del moltiplicatore di Jacobi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **5** (1926), n.5, p. 219–220.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_5_219_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1926.

Sull'equazione differenziale del moltiplicatore di Jacobi.

Nota di FRANCESCO SBRANA (a Genova).

È noto che per l'integrazione del sistema di equazioni differenziali

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n}, \tag{1}$$

dove $X_1, X_2,\ldots, X_n$ sono funzioni note delle variabili $x_1, x_2,\ldots, x_n$, ha interesse la considerazione di una funzione M, detta moltiplicatore di JACOBI, che verifica l'equazione alle derivate parziali

$$\sum_1^n{}_i \frac{\partial(MX_i)}{\partial x_i}=0. \tag{2}$$

Questa proprietà del moltiplicatore M è conseguenza di una relazione che intercede tra $n-1$ integrali indipendenti delle (1). Se $\theta_1, \theta_2,\ldots, \theta_{n-1}$ formano un sistema di tali integrali, e si rappresentano con $\Delta_1, \Delta_2,\ldots, \Delta_n$ i minori di ordine n della matrice jacobiana

$$\left|\begin{array}{cccc} \frac{\partial\theta_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\theta_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\theta_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\theta_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\theta_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\theta_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\theta_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial\theta_{n-1}}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\theta_{n-1}}{\partial x_n} \end{array}\right|,$$

la relazione accennata è la seguente:

$$\sum_1^n{}_i \frac{\partial\Delta_i}{\partial x_i}=0. \tag{3}$$

A questa si giunge di solito con un ragionamento alquanto laborioso [1].

Non so se sia stato osservato che la (3) è conseguenza dell'altra

$$\sum_1^n{}_i K_{im}=0, \tag{4}$$

[1] Cfr. APPELL, *Traité de Mécanique rat.*, T. 2ème, 1911, p. 443 e seguenti.

nella quale K_{im} è il determinante ottenuto da Δ_i derivando rapporto a x_i gli elementi dell'm^{sima} orizzontale, e lasciando invariati tutti i rimanenti.

La dimostrazione della (4) è immediata. Supposto, per semplicità, $m = 1$, e posto

$$S = \sum_1^n {}_i K_{i1},$$

è evidente che S è una funzione lineare e omogenea delle derivate seconde miste di θ_1. Se i ed l sono due interi differenti, compresi tra uno ed n, $\frac{\partial^2\theta_1}{\partial x_i \partial x_l}$ compare, una volta sola, in K_{i1}, e in K_{l1}. Si scorge poi subito che il coefficiente di questa derivata in K_{i1} è uguale in valore assoluto, e di segno opposto, al coefficiente della derivata stessa in K_{l1}.

Genova, 17 luglio 1926.