Ernest P. Lane

Le direttrici di Sullivan

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **5** (1926), n.5, p. 214–215.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_5_214_0>

Le direttrici di Sullivan.

Nota di ERNEST P. LANE (a Chicago).

Adoperando le equazioni

$$x_{uu} = \theta_u x_u + \beta x_v + n x, \quad x_{vv} = \gamma x_u + \theta_v x_v + \nu x, \quad \theta = \log(\beta\gamma),$$

di FUBINI per una superficie S non rigata, BOMPIANI ha dato (¹) una interpretazione geometrica delle ***forme elementari***

$$\beta \frac{du^2}{dv}, \quad \gamma \frac{dv^2}{du}.$$

La equazione differenziale delle estremali di $\int \gamma dv^2/du$ è

$$v'' = -\frac{\gamma_u}{\gamma} v' - \frac{1}{2} \frac{\gamma_v}{\gamma} v'^2.$$

(¹) Bollettino Unione Matem. Ital., Ottobre 1926.

I piani osculatori in un punto P di S alle curve uscenti da P inviluppano un cono di terza classe.

I tre piani cuspidali di questo cono passano per una stessa retta congiungente P al punto

$$x_{uv} - \frac{1}{4}\psi_2 x_u - \frac{1}{2}\psi_1 x_v, \tag{1}$$

ove

$$\psi_1 = \frac{\partial}{\partial u}\log \beta\gamma^2, \quad \psi_2 = \frac{\partial}{\partial v}\log \beta^2\gamma.$$

Similmente si ha un'altra retta congiungente P al punto

$$x_{uv} - \frac{1}{4}\psi_1 x_v - \frac{1}{2}\psi_2 x_u. \tag{2}$$

Queste rette sono precisamente le direttrici di Sullivan (scroll directrices) [1] considerate da GREEN e definite da lui in tutt'altra via. Si può anche dire: la prima direttrice di SULLIVAN è l'intersezione del piano in cui giacciono la tangente alla asintotica $v =$ cost. e la direttrice di WILCZYNSKI, e del piano in cui giacciono la tangente all'asintotica $u =$ cost. e lo spigolo di GREEN.

Le direttrici di SULLIVAN non giacciono nel piano canonico di FUBINI, e determinano un piano la cui equazione è

$$\psi_1 x_2 + \psi_2 x_3 + \frac{3}{4}\psi_1\psi_2 x_4 = 0.$$

Questo piano taglia il piano canonico nella retta congiungente P al punto

$$x_{uv} - \frac{3}{8}(\psi_2 x_u + \psi_1 x_v).$$

Ecco un'altra retta canonica notevole!

Se la superficie S è rigata, $\beta = 0$, $\gamma \neq 0$, la seconda direttrice di SULLIVAN diventa indeterminata ma la prima è ancora definita [2] da SULLIVAN e adoperata da lui come sostituta della direttrice di WILCZYNSKI, la quale è indeterminata in questo caso.

(1) Transactions of the American Mathematical Society, vol. XX, p. 111.
(2) SULLIVAN, Transaction of the American Mathematical Society, 1915