Bollettino Unione Matematica Italiana

Enrico Bompiani

Recensioni

* F. Klein: Vorlesungen über Höhere Geometrie

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **5** (1926), n.4, p. 192–198.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_4_192_0>

RECENSIONI

F. KLEIN: *Vorlesungen über Höhere Geometrie* (3ª ediz. elaborata da W. BLASCHKE; ed. J. Springer, Berlin, 1926).

È passato più di mezzo secolo da che il KLEIN lanciava al mondo matematico il suo famoso « Erlanger Programm », quasi un proclama incitante alla conquista di nuovi domini della nostra scienza. Dopo un ventennio al succinto e denso Programma, seguiva, per opera del KLEIN stesso, un'esposizione più ampia delle idee in quello contenute e dei risultati nel frattempo raggiunti nella *Einleitung in die höhere Geometrie.* Quanto debba lo sviluppo della Geometria a queste Lezioni sa chiunque vi abbia lavorato.

Il fatto che, dopo una 2ª edizione, una 3ª se ne sia resa necessaria prova, indirettamente, quale sia ancor oggi la vitalità e la ricchezza dei fermenti in esse contenute; meglio e più direttamente vale a provar ciò il fatto che il KLEIN, negli ultimi suoi anni, riusciva a portare i più recenti sviluppi della Relatività entro il quadro della sua mirabile sintesi giovanile: ultimo accordo, a conclusione della sua attività scientifica, di quella « prestabilita armonia fra matematica e fisica » il cui senso il KLEIN aveva ereditato da LEIBNITZ e da HELMHOLTZ e, in modo più immediato, dal PLÜCKER.

Per il KLEIN la ricerca matematica, quando sia vitale, pur essendo libera e incondizionata attività dello spirito, riesce ad informare di sè ogni altro ramo di ricerca scientifica e a creare le forme di pensiero atte a comprendere la realtà che ci circonda.

Al termine di un suo corso di Lezioni, modestamente intitolato di Geometria proiettiva, ove dalla teoria delle coniche di APOLLONIO si assurgeva all'interpretazione proiettiva delle metriche non-euclidee e da questa allo studio del gruppo di LORENTZ nella Relatività ristretta, il KLEIN esprimeva questa sua idea dominante sullo sviluppo della matematica con i versi di GOETHE

« Ein guter Mensch, in seinem dunklen Drange,
ist sich des rechten Weges wohl bewusst ».

L'attuale edizione comprende tre parti principali: il concetto generale di coordinate; la teoria delle trasformazioni; esempi di ricerche geometriche recenti. Le due prime parti figuravano nel 1° volume delle precedenti edizioni; l'ultima è nuova e nell'architettura dell'opera tiene il posto della teoria dei gruppi continui e discontinui che occupava già il 2° volume (e che non verrà ristampata poichè ha perduto interesse in seguito ad esposizioni autonome e più complete della teoria).

Delle prime due parti, tipiche dello stile del KLEIN per la varietà dei concetti, per la facilità di passaggio da un ordine di ricerche ad un altro, per i fecondi raffronti fra teorie apparentemente disparate, basterà ricordare brevemente il contenuto, qua e là arricchito da indicazioni nuove.

Nella prima parte dalle coordinate trilineari si passa alle coordinate curvilinee, in particolare alle ellittiche e alla determinazione delle geodetiche sulle quadriche; da queste alle coordinate pentasferiche e allo studio delle ciclidi. Uno sguardo al campo d'applicabilità delle coordinate puntuali e ai diversi indirizzi geometrici, algebrico e differenziale, fornisce al KLEIN l'occasione di presentare la teoria del complesso lineare, i suoi legami con la statica grafica, e l'interpretazione delle equazioni differenziali.

Gli oggetti geometrici si moltiplicano a dismisura quando alla nozione di punto si sostituisca quella di un « elemento generatore » arbitrario: è il fecondo principio di PLÜCKER che il KLEIN illustra con la dualità (e v'innesta il metodo della « piccola variazione » per le curve piane) e con la geometria della retta: la relazione quadratica fra le sue coordinate dà occasione al confronto fra questa geometria e quella delle coordinate pentasferiche e alla trasformazione di LIE fra lo spazio rigato e lo spazio delle sfere orientate: il terreno analitico comune è l'esistenza in ogni caso di una relazione quadratica invariante.

La trasformazione di LIE porta naturalmente al confronto fra l'equazione differenziale delle linee di curvatura e delle asintotiche di una superficie; e più in generale a vedere quale sia il vantaggio della libertà della scelta dell'elemento generatore per l'integrazione delle equazioni differenziali (teoria dei connessi di CLEBSCH; trasformazione delle equazioni di MONGE-AMPÈRE; etc.).

La seconda parte, teoria delle trasformazioni, è la più varia del volume e perciò più difficilmente riassumibile. Prima le trasformazioni puntuali e poi, cambiando l'elemento generatore, trasformazioni più generali e in particolare quelle di contatto.

Fra le prime: le trasformazioni lineari (con un accenno alla recente geometria proiettivo-differenziale), la proiezione stereografica, le trasformazioni circolari di MÖBIUS e la loro subordinazione alla geometria proiettiva; ravvivano l'esposizione di questa materia e ne rialzano l'interesse ora considerazioni tratte da scienze applicate (così p. es. le omografie degeneri nella prospettiva o le figure reciproche nella statica grafica) ora brillanti escursioni in teorie più elevate (p. es. la rappresentazione conforme fra superficie, la generazione di LIE delle superficie minime, il principio di trasporto di HESSE, il teorema di LIOUVILLE sulle rappresentazioni conformi fra spazi).

La teoria generale delle trasformazioni puntuali (analitiche) viene applicata, nel suo aspetto differenziale, alle forme differenziali lineari o pfaffiani (caratteri invarianti, forme normali, problema di PFAFF) e alle forme quadratiche (teorema egregium di GAUSS per le superficie, operatori di BELTRAMI, cenno sugli spazî di RIEMANN); nell'aspetto finito alle trasformazioni Cremoniane. Val la pena di rilevare l'esplicito invito allo studio delle proprietà invarianti degli pfaffiani algebrici come base per la classificazione delle trascendenti che nascono dalla loro integrazione; dal quale si può aspettare un vantaggio analogo a quello che per la teoria degli integrali abeliani offre lo studio delle curve algebriche.

La seconda metà di questa parte è dedicata alle trasformazioni di contatto. Un primo esempio è porto dalle correlazioni (in cui si scambiano gli elementi generatori punto e piano); il secondo dalle varie geometrie della sfera in S_3 o in S_n e dalle loro numerose relazioni con le geometrie di spazî superiori. Così, per riferirci ad S_3, la geometria elementare della sfera (cioè in cui il segno del raggio non è preso in considerazione) equivale alla geometrla proiettiva di una quadrica non degenere di S_4 (dai cui punti si passa alle sfere di S_3 attraverso una polarità e una proiezione stereografica) il cui gruppo G_{10} si riflette, per così dire, nel gruppo conforme di S_3; invece la geometria delle sfere orientate equivale alla geometria proiettiva di una quadrica di S_5, i cui punti corrispondono alle sfere di S_3; e il gruppo G_{15} che sta a base di questa geometria è l'imagine del G_{15} delle collineazioni di quella quadrica in sè, o anche del G_{15} delle trasformazioni conformi di un S_4 dai cui punti si passa alle sfere di S_3 con una proiezione isotropa. Fra questi gruppi, o fra queste geometrie della sfera, s'inserisce il gruppo di LAGUERRE G_{10}, che ha per imagine i movimenti di S_4 (e conserva, oltre alle sfere orientate i piani orientati) o, se si vuole è identico al gruppo di LORENTZ della relatività ristretta: e questo rientra nel gruppo delle trasformazioni « equilunghe » (invarianza della distanza fra i punti di contatto di un piano orientato con due superficie ad esso tangenti) le quali dipendono da funzioni arbitrarie; singolari trasformazioni per le quali non esiste, a differenza di quelle conformi in S_3 o in S_n $(n > 3)$, un teorema di LIOUVILLE!

Le relazioni ora ricordate fra varie geometrie valgono anche negli iperspazî; ma soltanto per S_3 la geometria della retta (geometria proiettiva di una quadrica in S_5) equivale alla geometria delle sfere orientate: e questa equivalenza mostra l'intima ragione della trasformazione di LIE! Alla integrazione delle equazioni differenziali che nascono in queste geometrie è premessa la teoria geometrica di LIE sulle striscie caratteristiche di un'equazione a derivate parziali del 1° ordine e ne è illustrato il valore per il processo d'integrazione. La stessa teoria delle striscie caratteristiche fornisce il significato geometrico delle condizioni affinchè una trasformazione fra faccette di S_3 sia una trasformazione di contatto.

A queste indicazioni generali seguono tre esempi di trasformazioni di contatto (trasformazioni podarie rispetto ad un punto fisso; teoria degli ingranaggi; metodo della variazione delle costanti nelle equazioni differenziali della meccanica) e infine alcune rapide indicazioni sulla teoria invariantiva delle trasformazioni di contatto e un invito allo studio di quelle (più generali) che operano come tali non sulla totalità delle faccette (x, y, z, p, q) ma su quelle soddisfacenti ad una $f(x, y, z, p, q) = 0$ (con particolare riguardo al caso che f sia algebrica negli argomenti indicati).

La terza parte raccoglie (in cinque capitoli o appendici), senza alcuna pretesa alla completezza, alcune ricerche geometriche recenti in più o meno stretta relazione con le idee di KLEIN e di LIE.

La I Appendice, redatta dal BLASCHKE, rende conto delle ricerche di STUDY sulla geometria della retta. Se sulla sfera unitaria si considerano i punti « duali » (aventi cioè coordinate del tipo $a + \varepsilon b$ con $\varepsilon^2 = 0$ e a e b reali) a ciascuno di essi si può far corrispondere una retta (propria, reale, orientata) di S_3, e viceversa: in questa corrispondenza, che permette di ottenere teoremi di geometria della retta da altri di geometria sferica, consiste il « principio di trasporto » di STUDY. Il gruppo G_6 delle trasformazioni lineari intere che mutano la sfera in sè ha per immagini le trasformazioni congruenti dello spazio rigato; questo è il punto di partenza delle interessanti ri... ...natiche di STUDY. Che se invece si considerano i punti e le rette « duali » del piano e la sua geometria proiettiva si ha in corrispondenza lo spazio rigato coperto da due « strati » di rette (reali) e il suo G_{16} (a 16 param. reali) si compone delle trasformazioni biunivoche delle rette di ciascuno strato che conservano l'ortogonalità di rette appartenenti a strati differenti (geom. proiett. radiale di STUDY). In questo G_{16} si lascia caratterizzare facilmente il G_6 delle trasformazioni di LAGUERRE nel piano; ed allo stesso G_{16} si perviene, come caso limite, da una rappresentazione delle rette complesse del piano, e delle sue collineazioni, sulle rette reali di uno spazio iperbolico suggerita dal KLEIN. A queste ricerche di STUDY si collegano, o da esse derivano, una quantità di lavori intesi a chiarire, in base ai gruppi che le caratterizzano, numerose geometrie e le loro mutue relazioni. Vale infine la pena di citare la « rappresentazione cinematica » di W. BLASCHKE e J. GRÜNWALD che rappresenta i punti dello spazio con i movimenti piani.

La II e la IV Appendice sono essenzialmente dovute al RADON. Nella II è data una nuova ed interessante generazione meccanica del parallelismo di LEVI-CIVITA sopra una superficie. Un punto M (di massa 1) di essa è collegato elasticamente ad un punto P del piano ivi tangente; il potenziale della forza elastica sia $\frac{k^2}{2}\overline{MP}^2$. L'osservatore porti ora con sè l'oscillatore lungo una curva della superficie in modo che l'oscillatore rimanga sempre nel piano tangente nel punto che si considera della curva e il punto P sia fisso in esso. In prima approssimazione, per k^2 molto grande il moto dell'oscillatore dà luogo al trasporto parallelo di LEVI-CIVITA. È chiara l'analogia di questo procedimento con l'altro di LEVI-CIVITA che consiste nello sviluppo della striscia di superficie aderente alla curva di trasporto in un piano, e nel trasporto parallelo (in senso euclideo) su questo, indi nel ritorno alla superficie iniziale.

Anche pieni d'interessi sono i raffronti svolti nell'Appendice IV dal RADON fra le equazioni di MONGE $f(x, y, z, y', z') = 0$ e le equazioni a derivate parziali del 1° ordine. Il nesso geometrico sta nel fatto che tutt'e due i tipi definiscono in ogni punto (x, y, z) un cono (luogo nel 1°, inviluppo nel 2°); e il passaggio da un'equazione di MONGE alla corrispondente equazione a derivate parziali avviene in modo, com'è geometricamente evidente, che le curve integrali della prima sono le curve caratteristiche della seconda (oppure i secondi inviluppi, o spigoli di regresso, di ∞^1 sue superficie integrali). Ancora: al problema di variazione relativo ad $\int_b^a \varphi(x, y, y')dx$ si può associare l'equazione di MONGE $z' = \varphi(x, y, y')$ (i cui coni sono identici per tutti i punti di una parallela all'asse z); l'equazione delle caratteristiche della relativa equazione a derivate parziali è l'equazione differenziale di EULERO per le estremali.

A questi riavvicinamenti se ne lega un altro con la teoria delle trasformazioni di contatto. Se si segano con due piani paralleli le striscie caratteristiche di un'equazione a derivate parziali si ha fra questi una trasformazione di contatto; se i due piani sono infinitamente vicini si ha una trasformazione infinitesima (la più generale) in cui ad un punto di un piano corrisponde nell'altro la curva d'intersezione col cono di MONGE che ha il vertice in quel punto. E nel caso particolare $z' = \varphi(x, y, y')$ se il primo piano è $z = 0$ e il 2° è un piano qualsiasi parallelo ad esso (non occorre infinitamente vicino) la curva corrispondente ad un punto del primo sul 2° è precisamente l'indicatrice di CARATHÉODORY.

E in breve: nelle trasformazioni infinitesime di contatto sopra ricordate sta l'intima analogia e la ragione del successo del metodo di CARATHÉODORY con quello, basato su analogie ottiche, già usato da J. BERNOULLI all'inizio del calcolo delle variazioni.

L'Appendice III riguarda la topologia: i problemi che ne formano l'oggetto si distinguono in due tipi, appartenenti gli uni alla teoria degli insiemi, gli altri di carattere combinatorio. Al primo tipo appartiene il teorema di TIETZE sulle deformazioni di un cerchio in sè (appartenenza di esse ad un gruppo continuo) di cui è data la dimostrazione di ALEXANDER; all'altro il problema delle « treccie » di E. ARTIN (cui è dovuta la redazione di questa parte). La « treccia » di ordine n è così definita (con qualche limitazione qualitativa): su due rette parallele ed ugualmente orientate sono dati due gruppi di punti $A_1 A_2 \dots A_n$ e $B_1 B_2 \dots B_n$ (seguentisi su ciascuna retta nell'ordine scritto secondo il verso positivo fissato) e una corrispondenza $A_i \rightarrow B_{r_i}$ fra essi. Si congiungano coppie di punti corrispondenti con curve prive di punti doppi (fili) orientate da A_i verso B_{r_i}: l'insieme di questi fili è una treccia. Il problema topologico è quello della composizione di una treccia, cioè del come si possa sciogliere (o ridurre alla treccia unitaria rappresentata da fili tesi fra i punti A_i e B_i). Perciò l'ARTIN studia l'accoppiamento (prodotto) di due treccie e alcune treccie elementari per mezzo delle quali è possibile costruire ogni altra treccia: fra esse $(n-1)$ valgono alcune relazioni che definiscono il gruppo associato alla treccia d'ordine n.

Dalle treccie aperte si passa poi a quelle chiuse spostando le due rette di sostegno fino a farle coincidere e spostandone i punti in guisa che sia $A_i \equiv B_i$ (e togliendo infine la retta d'appoggio).

Nella difficoltà di risolvere il problema generale del concatenamento sembra molto opportuna la scelta fatta dall'ARTIN del problema delle treccie che conduce a risultati concreti e ben definiti.

L'ultima Appendice, introduzione alla teoria dei divisori elementari, riguarda le sostituzioni lineari e la riduzione simultanea a forma canonica (cioè con i soli quadrati) di due forme quadratiche in n variabili, di cui spesso si ha bisogno in Geometria, secondo un'idea già espressa da H. WEYL nella « Mathematische Analyse des Raumproblems » (1923) e qui completata e limpidamente esposta da O. SCHREIER.

Una parola sull'insieme del libro. Esso è riuscito veramente vivo e moderno: il BLASCHKE, che delle idee geometriche del KLEIN è uno dei più efficaci continuatori, ha saputo inserire nella tela originale del KLEIN i nuovi risultati e i nuovi indirizzi senza alterarne affatto il disegno e lo stile.

E. BOMPIANI