Bollettino Unione Matematica Italiana

Corradino Mineo

Sullo sviluppo rigoroso in serie di funzioni sferiche del potenziale esterno e della gravità superficiale d'un pianeta

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **5** (1926), n.4, p. 173–179.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_4_173_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1926.

Sullo sviluppo rigoroso in serie di funzioni sferiche del potenziale esterno e della gravità superficiale d'un pianeta.

Nota di CORRADINO MINEO (a Palermo).

Il problema della determinazione del potenziale esterno d'un pianeta, nel caso che una superficie d'equilibrio, limitante l'intera massa, sia uno elissoide di rotazione, fu virtualmente risoluto dallo STOKES, nel 1849; giacchè, se lo STOKES dà del problema una soluzione approssimata, egli accenna, però, al modo con cui l'approssimazione possa essere proseguita indefinitamente [1].

Scopo di questa Nota è di mostrare come nel caso anzidetto si possa addirittura stabilire la natura dello sviluppo rigoroso in serie di funzioni sferiche (d'una sola variabile) della funzione potenziale V (e poi della gravità superficiale) del pianeta e come se ne possano facilmente calcolare i coefficienti con quell'approssimazione che si vuole.

[1] Cfr. STOKES, *On the variation of gravity at the surface of the Earth*, Math. and Phys. Papers, vol. II, Cambridge (1883), p. 141, n. 9 e p. 170, n. 35. Per mezzo delle funzioni di LAMÉ e anche nel caso più generale d'un ellissoide a tre assi, il problema fu poi rigorosamente risoluto dall'HAMY nel 1890 (Journ. de Mathém. pures et appliquées, 4ª serie, vol. VI, pp. 69-148). Un'altra soluzione molto elegante fu data dal PIZZETTI, nel 1894 (Rend. Acc. Lincei, vol. III, 1894, pp. 166-172 e 230-238).

Il metodo può essere opportunamente adoperato anche nel problema inverso, che consiste, cioè, nel cercare di risalire dalla gravità assegnata a uno sferoide di dato tipo. Questo problema, com'è noto, fu posto e risoluto dallo STOKES, *in particolari ipotesi e dentro una certa approssimazione*: preso, infatti, in tutta la sua generalità, il problema può riescire impossibile o indeterminato.

Ora, nei casi che hanno reale importanza nella teoria della figura della Terra e nell'ipotesi che lo sferoide terrestre sia di rotazione, il metodo da me seguito è estensibile a casi più generali di quelli finora trattati e lascia prevedere che le equazioni dalle quali dipende la determinazione delle costanti, che entrano nell'equazione dello sferoide cercato, riescano più semplici di quelle alle quali conducono i metodi adoperati dall'HELMERT (1) e dall'ALMANSI (2).

1. Scegliamo come polo e come asse polare il centro e l'asse di rotazione dell'ellissoide. Indicando con r e θ il raggio vettore e la colatitudine d'un punto, l'equazione del nostro ellissoide è della forma

$$r = a \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{i=j} \alpha_{ij} P_{2i} e^{2j} \right\}, \tag{1}$$

dove a è la lunghezza del semiasse maggiore, e l'eccentricità, P_{2i} il polinomio di LEGENDRE di grado $2i$, calcolato per $x = \cos\theta$; le α_{ij} sono costanti.

Se si tien presente la relazione

$$P_h P_k = \sum_{i=0}^{h+k} c_i P_i; \tag{2}$$

dove $c_0, \ldots, c_{h+k}$ sono determinate costanti, si conclude facilmente che ogni potenza di r ha uno sviluppo della stessa forma del 2° membro della (1). Porremo generalmente

$$r^m = a^m \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{i=j} \alpha_{ij}^{(m)} P_{2i} e^{2j} \right\}, \tag{3}$$

per ogni intero m (non nullo) positivo o negativo.

Sia M la massa totale e ω la velocità angolare di rotazione del pianeta: la funzione potenziale esterna V del pianeta è ar-

(1) HELMERT, *Die mathematischen und physikalischen Theorieen der höheren Geodäsie* (Lipsia, 1884), vol. II, cap. II, p. 83 e seguenti.

(2) ALMANSI, *Sulla forma dello sferoide terrestre dedotta dalle misure di gravità*, Rend. Acc. Lincei (Roma, 1917), vol. XXVI, pp. 358-367.

monica fuori di (1), regolare e nulla all'infinito e sulla (1) si deve ridurre a

$$F(\theta)=c-\frac{\omega^2}{2f}r^2\operatorname{sen}^2\theta,$$

essendo c una costante ed f la costante di GAUSS.

Poichè

$$\operatorname{sen}^2\theta=\frac{2}{3}(1-P_2),$$

si ha, tenendo presenti (2) e (3):

$$(4)\qquad F(\theta)=c-\frac{\omega^2}{3f}a^2\left\{1-P_2+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{j+i}\beta_{ij}P_{2i}e^{2j}\right\}.$$

Data la forma di $F(\theta)$, è facile assegnare la soluzione di questo particolare problema di DIRICHLET: la V ha uno sviluppo della seguente natura:

$$(5)\qquad V=\frac{M}{r}+\alpha_1\frac{P_2}{r^3}+\alpha_2\frac{P_4}{r^5}+\ldots+\alpha_n\frac{P_{2n}}{r^{2n+1}}+\ldots,$$

essendo

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{ll}\alpha_1 &= A_{10}+A_{11}e^2+A_{12}e^4+\ldots\ldots\ldots+A_{1n}e^{2n}+\ldots,\\ \alpha_2 &= \qquad A_{21}e^2+A_{22}e^4+\ldots\ldots\ldots+A_{2n}e^{2n}+\ldots,\\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_n &= \qquad\qquad A_{n,n-1}e^{2n-2}+A_{nn}e^{2n}+\ldots,\\ \alpha_{n+1} &= \qquad\qquad\qquad A_{n+1,n}e^{2n}+\ldots,\\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.$$

dove le A sono coefficienti che si possono successivamente calcolare.

2. Per provarlo, basta procedere per induzione completa.

Denotiamo con V_s il valore che la V prende in un punto generico della superficie (1) e supponiamo che l'identità

$$(7)\qquad V_s=F(\theta)$$

sia stata soddisfatta a meno di termini in e^{2n}: supponiamo, cioè, che siano state già calcolate le $\frac{n(n+1)}{2}$ costanti $A_{10},\ldots, A_{1,n-1},\ldots, A_{n,n-1}$. Si tratta ora di soddisfare alla (7) a meno di termini in e^{2n+2}, cioè di calcolare le $n+1$ costanti

$$A_{1n},\quad A_{2n},\ldots, A_{nn},\quad A_{n+1,n}.$$

Poniamo

$$c = c_0 + c_1 e^2 + c_2 e^4 + \dots + c_n e^{2n} + \dots . \tag{8}$$

La (7) si può scrivere, nell'approssimazione ora detta:

$$\begin{aligned} &\frac{M}{a}\left\{1 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j}\alpha_{ij}^{(-1)}P_{2i}e^{2j}\right\} + \sum_{k=h-1}^{n}\sum_{h=1}^{n+1}A_{hk}e^{2k}\left\{1 + \sum_{j=1}^{n-h+1}\sum_{i=0}^{j}\alpha_{ij}^{(-2h-1)}P_{2i}e^{2j}\right\}\frac{P_2}{a^{2h}} \\ &= c_0 + c_1 e^2 + \dots + c_n e^{2n} - \frac{\omega^2}{3f}a^2\left\{1 - P_2 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j+1}\beta_{ij}P_{2i}e^{2j}\right\}, \end{aligned} \tag{9}$$

la quale dev'essere soddisfatta a meno di termini in e^{2n+2}.

Ma la (9) è già soddisfatta, per ipotesi, salvo termini in e^{2} in virtù della precedente approssimazione; si tratta, dunque, identificare nei due membri i coefficienti di e^{2n}, e poichè in es entrano soltanto i polinomi $P_0, P_2, \dots, P_{2n+2}$, si avranno $n+2$ r lazioni, quante occorrono per la determinazione dei coefficien $A_{1n}, \dots, A_{n+1,n}$ e della costante c_n. Ora, se eguagliamo nei d membri di (9) i coefficienti di $P_{2h}e^{2n}$ $(h = 1, 2, \dots, n+1)$, otteniam una equazione che contiene la sola incognita A_{hn}, il cui coef ciente è visibilmente $\frac{1}{a^{2h+1}}$. Le nostre incognite sono dunque da immediatamente dal sistema

$$\frac{1}{a^3}A_{1n} = \sigma_1, \quad \frac{1}{a^5}A_{2n} = \sigma_2, \dots, \quad \frac{1}{a^{2n+3}}A_{n+1,n} = \sigma_{n+1}, \tag{10}$$

dove le σ sono quantità note, dipendenti linearmente dai coef cienti precedentemente determinati.

Eguagliando, nella (9), i coefficienti di $P_0 e^{2n}$, si ha

$$c_n = \sigma_0, \tag{11}$$

che determina la costante c_n [1].

3. Volendo lo sviluppo dell'accelerazione di gravità g su superficie (1), basta partire dalla formula

$$g = \frac{1}{\cos \widehat{rn}}\frac{\partial W}{\partial r},$$

[1] È quasi superfluo avvertire che se si fosse scritto

$$\alpha_{n+1} = A_{n+1,0} + A_{n+1,1}e^2 + \dots + A_{n+1,n-1}e^{2n-2} + A_{n+1,n}e^{2n} + \dots,$$

si sarebbe trovato

$$A_{n+1,0} = A_{n+1,1} = \dots = A_{n+1,n-1} = 0.$$

essendo

$$W = fV + \frac{\omega^2}{2} r^2 \operatorname{sen}^2 \theta$$

e $\widehat{rn}$ l'angolo che il raggio vettore r, che va a un punto della superficie (1), forma con la normale alla superficie nel punto, diretta positivamente verso l'interno.

Ora si ha

$$\cos \widehat{rn} = - \left\{ 1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

D'altra parte è

$$\frac{dr}{d\theta} = a \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{j} \alpha_{ij} \frac{dP_{2i}}{d\theta} e^{2j};$$

e, tenendo presente la nota formula

$$\frac{dP_{2i}}{d\theta} = - \operatorname{sen} \theta \sum_{k=0}^{i-1} (4i - 4k - 1) P_{2i-2k-1},$$

insieme con le (2) e (3), si deduce senza difficoltà

$$\cos \widehat{rn} = - 1 + e^4 \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{i=0}^{j} \nu_{ij} P_{2i} e^{2j-4}.$$

Dalla stessa forma è naturalmente lo sviluppo di $\dfrac{1}{\cos \widehat{rn}}$.

Facilmente si ottiene lo sviluppo di $\dfrac{\partial W}{\partial r}$, tenendo presente la (5); e infine per g si ha:

$$g = \frac{fM}{a^2} - \frac{2}{3} \omega^2 a + \left(\frac{2}{3} \omega^2 a + \frac{3A_{10}}{a^4} \right) P_2 + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{j+1} \gamma_{ij} P_{2i} e^{2j}. \tag{12}$$

4. Nel caso dell'ellissoide, si ha, a meno di termini in e^6:

$$r = a \left\{ 1 - \frac{1}{6} (P_0 + 2P_2) e^2 - \frac{1}{840} (77 P_0 + 100 P_2 - 72 P_4) e^4 \right\}. \tag{13}$$

In quest'approssimazione si trova

$$\begin{aligned} V = \frac{M}{r} &+ \left[\frac{\omega^2 a^5}{3f} - \left(\frac{Ma^2}{3} + \frac{3\omega^2 a^5}{14f} \right) e^2 - \frac{13\omega^2 a^5}{1176f} e^4 \right] \frac{P_2}{r^3} + \\ &+ \left[- \frac{2\omega^2 a^7}{7f} e^2 + \left(\frac{Ma^4}{5} + \frac{9\omega^2 a^7}{49f} \right) e^4 \right] \frac{P_4}{r^5} + \frac{5\omega^2 a^9}{21f} e^4 \frac{P_6}{r^7} \end{aligned} \tag{14}$$

E per la gravità superficiale:

$$(15) \quad \begin{aligned} g = &\left[\left(\frac{fM}{a^2} - \frac{2}{3}\omega^2 a\right) + \left(\frac{fM}{3a^2} + \frac{\omega^2 a}{3}\right)e^2 + \left(\frac{2fM}{15a^2} + \frac{19\omega^2 a}{84}\right)e^4\right] + \\ &+ \left[\frac{5}{3}\omega^2 a - \left(\frac{fM}{3a^2} - \frac{19\omega^2 a}{42}\right)e^2 - \left(\frac{fM}{3a^2} - \frac{5\omega^2 a}{392}\right)e^4\right]P_2 + \\ &+ \left[-\frac{6}{7}\omega^2 a e^2 + \left(\frac{fM}{5a^2} - \frac{361\omega^2 a}{539}\right)e^4\right]P_4 + \frac{95\omega^2 a}{231}e^4 P_6 . \end{aligned}$$

5. Facile sarebbe assegnare limiti superiori degli errori che si commettono nel calcolo di V, eseguito con una determinata approssimazione. Se V_1 è il valore approssimato trovato e si pone $V = V_1 + V_2$, si tratta di determinare un limite superiore del modulo di V_2, sapendo che V_2 è armonica fuori della (1), regolare e nulla all'infinito e si riduce sulla (1) a una funzione, del modulo della quale è assegnabile un limite superiore.

Assegnato un limite superiore di $|V_2|$, si potrà poi assegnare un limite superiore del modulo della derivata normale di V_2, relativa alla data superficie d'equilibrio (per mezzo della seconda formula di GREEN), e quindi un limite superiore del modulo del corrispondente errore in g $\left(\text{per mezzo della formula } g = \frac{dW}{dn}\right)$.

6. Accennerò al problema inverso. Sia data la g sotto la forma

$$g = \gamma_0 P_0 + \gamma_1 P_2 + \dots + \gamma_n P_{2n} + \dots,$$

con

$$\gamma_0 = C_{00} + C_{01}e^2 + \dots, \quad \gamma_1 = C_{10} + C_{11}e^2 + \dots,$$
$$\gamma_2 = C_{21}e^2 + C_{22}e^4 + \dots, \ \dots, \ \gamma_n = C_{n,\, n-1}e^{2n-2} + \dots$$

Tra le superficie d'equilibrio del pianeta, compatibili con la g assegnata su di essa, si cerchi uno sferoide di rotazione di tipo (1), cioè di equazione

$$r = a \{ 1 + \beta_0 P_0 + \beta_1 P_2 + \dots + \beta_n P_{2n} + \dots \}$$

con

$$\beta_0 = B_{01}e^2 + B_{02}e^4 + \dots, \ \dots, \ \beta_n = B_{nn}e^{2n} + B_{n,\, n+1}e^{2+n2} + \dots .$$

Dalle cose dette, risulta che il problema della ricerca delle costanti a, β_0, $\beta_1 \dots$ è determinato: bisogna, però, che sia soddisfatta la condizione

$$C_{00} = \frac{fM}{a^2} - \frac{2}{3}\omega^2 a .$$

Dati, insomma, a, ω e M, resta individuata quella che lo STOKES chiama *gravità media* $\left(\frac{fM}{a^2} - \frac{2}{3}\omega^2 a\right)$, relativa alla sfera di raggio a.

Palermo, giugno 1926.