Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Enrico Bompiani

Le forme elementari e la teoria proiettiva delle superficie

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **5** (1926), n.4, p. 167–173.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_4_167_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1926.

Le forme elementari e la teoria proiettiva delle superficie.

Nota 1ª di E. BOMPIANI (a Bologna).

1. Nel corso di Geometria superiore svolto nel passato anno scolastico presso l'Università di Bologna sulla teoria proiettiva delle superficie, ho trovato vantaggioso sostituire alle forme normali di FUBINI (v. appresso), che le individuano nel gruppo delle

applicabilità proiettive (a. p.) due altre forme, che chiamo elementari; il loro significato geometrico è molto semplice e di più da esse si deducono con procedimenti geometrici ben netti tutti **gli invarianti delle superficie (e delle curve tracciate su** di esse) **per a. p. Alla loro invarianza formale viene così sostituita** la **conoscenza del loro significato. Appare ancora** di qua l'**importanza di quegli *invarianti (birapporti) infinitesimi*** già da me **usati per le curve e per le superficie e che costituiscono lo strumento adeguato a questo genere di ricerche.**

2. Le forme elementari. — Partiamo da una *rappresentazione parametrica* di una superficie σ (non sviluppabile) in coord. proiett. omog. $x_i(u, v)$ $i = 1, \ldots, 4$; le linee parametriche u $(dv = 0)$ e v $(du = 0)$ siano le asintotiche. Le x_i sono soluzioni di un sistema

$$(1) \qquad \begin{cases} x_{uu} = ax_u + \beta x_v + cx \\ x_{vv} = a'x_v + \gamma x_u + c'x \end{cases} \qquad \left(x_u = \frac{\partial x}{\partial u}, \ldots\right).$$

Due quaterne x_i e $\bar{x}_i$ di soluzioni indipendenti danno luogo a due superficie σ e $\bar{\sigma}$ collineari: il sistema (1) individua σ nel gruppo delle collineazioni.

Viceversa: data σ (e non *una* sua rappresentazione parametrica) il sistema (1) *non* è determinato: le sostituzioni di $y_i = \rho(u, v)x_i$, $\bar{u} = \bar{u}(u)$, $\bar{v} = \bar{v}(v)$ alle x_i, u, v non alterano nè σ nè le linee parametriche; ma per effetto di esse si alterano i coefficienti di (1).

Basta eseguire di fatto i cambiamenti indicati per trovare che sono *invarianti* le *forme elementari* (monomie)

$$\chi_1 = \beta du^2/dv, \quad \chi_2 = \gamma dv^2/du.$$

Da esse si ricavano subito le altre *forme invarianti* di Fubini: per somma

$$\frac{\beta du^3 + \gamma dv^3}{dudv} \qquad \textit{elemento lineare proiettivo}$$

per prodotto

$$\varphi_2 = 2\beta\gamma dudv \qquad \textit{forma quadratica normale}$$

e poi

$$\varphi_3 = 2\beta\gamma(\beta du^3 + \gamma dv^3) \qquad \textit{forma cubica normale.}$$

Risulta anche l'invarianza delle altre due *forme elementari*, monomie e dipendenti da un solo differenziale,

$$d_1 s^3 = \beta^2\gamma du^3, \quad d_2 s^3 = \beta\gamma^2 dv^3;$$

assumeremo $d_1 s$ e $d_2 s$ (determinati ciascuno a meno di una radice

cubica dell'unità) come *elementi d'arco proiettivi delle asintotiche* nel punto $O(u, v)$ di σ.

È poi noto che, definite le forme normali (o, come s'è visto, le forme elementari), rimane definita anche una scelta intrinseca ed invariante del *fattore di normalizzazione* ρ delle coordinate x_i; talchè si possono supporre, con FUBINI, le x_i normalizzate in modo da soddisfare al sistema

$$(1^*)\qquad \begin{cases} x_{uu} = \dfrac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u} x_u + \beta x_v + n x \\ x_{vv} = \dfrac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v} x_v + \gamma x_u + v x. \end{cases}$$

3. Significato geometrico delle forme elementari. — Sia C una curva di σ uscente da O in direzione du/dv ed O' un punto di essa $\neq O$. L'asintotica u $(dv = 0)$ uscente da O e l'asintotica v $(du = 0)$ uscente da O' si taglino nel punto O_1'; e analogamente l'asintotica v uscente da O e la u da O' si taglino in O_2': sicchè OO_1' OO_2' costituiscono i vertici di una *maglia asintotica* (quadrilatero curvilineo avente per lati archi di asintotiche).

Il punto O' ha coordinate del tipo

$$x' = x + dx + \frac{1}{2} d^2x + \dots$$

ove le differenziazioni d si riferiscono alla curva data C (senza che occorra specificare un parametro da cui far dipendere i suoi punti). Le coordinate di O_1' sono invece del tipo

$$x'_1 = x + x_u du + \frac{1}{2} x_{uu} du^2 + \dots$$

Il punto T_1 in cui la retta $O'O_1'$ sega il piano tangente in O ha coordinate del tipo $X = \tau x' + x'_1$ soddisfacenti all'equazione determinante $|X, x, x_u, x_v| = 0$ (il determinante è costruito con le coordinate omogenee dei punti indicati); per mezzo delle (1) o (1*) si trova $\tau = -\frac{1}{6}\beta\frac{du^2}{dv} + \dots$.

Un punto M della stessa retta $O'O_1'$ che *non* tenda ad O quando $O' \to O$ su C ha coordinate $\lambda x' + x'_1$ con $\lambda = -1 + \dots$ (perchè solo così si elidono i termini in x nella combinazione $\lambda x' + x'_1$); sicchè il birapporto

$$(O_1' O' T_1 M) = \frac{1}{6}\beta\frac{du^2}{dv} + \dots.$$

Il termine principale del birapporto $(O_1'O'T_1M)$ *quando* $O' \to O$ *su* C *dipende soltanto dalla tangente a* C *in* O *(e non dalla posizione limite di* M *purchè* $\neq O$) *e vale* 1/6 *della forma elementare* $\beta du^2/dv$.

Analogamente si ha $\gamma dv^2/du$ operando sulla corda $O_2'O'$.

Il prodotto (dei termini principali) di uno di questi birapporti per il quadrato dell'altro fornisce d_1s^3 *e* d_2s^3.

Anche del rapporto $(d_1s/d_2s)^3 = \beta du^3/\gamma dv^3$ può darsi un significato molto semplice: *esso è il limite* (*per* $O' \to O$) *del birapporto dei punti* O_1', O_2', *del punto ove questa retta incontra il piano tangente e di un quarto punto arbitrario su di essa (non tendente ad* O *insieme con* O').

Ancora dalle stesse forme elementari possono ricavarsi nuove proprietà caratteristiche che definiscono le linee di SEGRE, di DARBOUX, le linee canoniche di FUBINI.

Siano $O(u, v)$, $O'(u + du, v + dv)$, $O_1'(u + du, v)$, $O_2'(u, v + dv)$ i vertici di una maglia asintotica infinitesima. Calcoliamo la variazione subita dall'elemento d'arco d_1s passando dal lato OO_1' al lato opposto della maglia $O_2'O'$: questa variazione d_2d_1s, divisa per d_1s, vale l'*invariante infinitesimo*

$$\frac{d_2d_1s}{d_1s} = \frac{1}{3}\frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v}dv = \frac{1}{3}\psi_2 dv\,;$$

analogamente la variazione di d_2s passando da OO_2' ad $O_1'O'$ è data da

$$\frac{d_1d_2s}{d_1s} = \frac{1}{3}\frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u}du = \frac{1}{3}\psi_1 du.$$

Ricordando le equazioni delle linee di SEGRE $\beta du^3 = \gamma dv^3$, di DARBOUX $\beta du^3 = -\gamma dv^3$ e delle linee canoniche $\psi_1 du = -\psi_2 dv$ si ha:

Le linee di Segre sono le diagonali di un reticolato di asintotiche le cui maglie infinitesime hanno lati adiacenti uguali (cioè di archi proiettivi uguali); per le linee di Darboux, che costituiscono l'altro sistema di linee diagonali dello stesso reticolato, questi lati adiacenti sono uguali e di segno opposto. Le linee canoniche sono diagonali di un reticolato di asintotiche in cui le differenze fra le coppie di lati opposti (cioè dei loro archi proiettivi) di una maglia (infinitesima) sono uguali (e di segno opposto per le linee coniugate a quelle canoniche).

4. Le estremali delle forme elementari. — Fra le curve di σ invarianti per a. p. sono particolarmente semplici (per le loro equazioni differenziali) le estremali delle forme χ_1 e χ_2. Le loro equazioni differenziali sono

$$dud^2v - dvd^2u = \frac{1}{2}\frac{\partial \log \beta}{\partial u} du^2dv + \frac{\partial \log \beta}{\partial v} dudv^2$$

e

$$dud^2v - dvd^2u = -\frac{\partial \log \gamma}{\partial u} du^2dv - \frac{1}{2}\frac{\partial \log \gamma}{\partial v} dudv^2$$

da cui si ha subito una conseguenza sulle corrispondenze fra superficie che conservano uno o tutt'e due i sistemi di estremali.

Se s'introducono i differenziali δ^2 controvarianti rispetto a φ_2 le equazioni precedenti si scrivono

$$(*) \qquad du\delta^2v - dv\delta^2u = \left(-\frac{1}{2}\psi_1 du + \psi_2 dv\right)dudv$$

$$(**) \qquad du\delta^2v - dv\delta^2u = \left(-\psi_1 du + \frac{1}{2}\psi_2 dv\right)dudv.$$

Esse appartengono al tipo generale

$$\beta\gamma(du\delta^2v - dv\delta^2u) = \theta_1\beta^2\gamma du^3 + \theta_2\beta\gamma^2 dv^3 + (lh_1du - lh_2dv)\cdot\varphi_2$$

le cui curve integrali sono state da me recentemente caratterizzate [1]. Riferiamoci alle estremali di χ_1 e introduciamo le notazioni $T = |X, x, x_u, x_v|$, $N_1 = |X, x, x_u, x_{uv}|$, $N_2 = |X, x, x_v, x_{uv}|$, $\Omega = |X, x_u, x_v, x_{uv}|$ ove i secondi membri indicano determinanti costruiti con le coord. proiet. omog. dei punti indicati ed X è un punto generico dello spazio $\mathcal{H} = -\frac{1}{\beta\gamma}\left(\frac{\partial^2 \log \beta\gamma}{\partial u \partial v} + \beta\gamma\right)$. Data una curva C di σ chiamo *quadrica asintotica osculatrice* (del 1° sistema) ad essa nel punto O quella osculatrice in O alla rigata delle tangenti asintotiche u uscenti dai suoi punti (operando invece sulle asintotiche v si ha una quadrica osculatrice del 2° sistema).

Le quadriche asintotiche osculatrici (del primo sistema) in O *alle curve integrali di* (*) *tagliano in quadrilateri sghembi una stessa quadrica* Q_1 *di equazione*

$$2\left(N_1 - \frac{\psi_1}{4}T\right)\left(N_2 + \frac{\psi_2}{2}T\right) = N_1N_2 - \Omega T - \frac{1}{2}\beta\gamma\mathcal{H}T^2;$$

Q_1 *è definita geometricamente dall'appartenere al fascio individuato*

(1) *Ancora sulla geometria delle superficie considerate nello spazio rigato*; n.i 4-8 (Rendic. Accad. dei Lincei, s. VI, vol. IV, 1926).

dalla quadrica di Lie in O e dalla coppia di piani $N_1 = \frac{\psi_1}{4} T$, $N_2 = -\frac{\psi_2}{2} T$, *e dall'avere con la quadrica di Lie un invariante proiettivo di contatto* $= -1$ [1].

Diciamo *retta invariante* relativa a (*) quella di cui si sono ora scritte le equazioni: la sua definizione geometrica si trova nella Nota citata; un'altra proprietà è questa:

I piani osculatori in O alle curve di (*) formano un inviluppo cubico i cui piani cuspidali passano per la retta invariante.

Per determinare la quadrica asintotica osculatrice alla curva di (*) uscente da O in direzione du/dv si ha il teorema:

Il luogo dei punti di contatto (non appartenenti alle tangenti asintotiche in O) *delle quadriche asintotiche osculatrici (del primo sistema) con* Q_1 *è la cubica sghemba ulteriore intersezione (tolta la retta invariante) di* Q_1 *col cono quadrico*

$$\left|\frac{\psi_1}{4} T - N_1\right|^2 + \frac{\beta}{2}\left[\frac{\psi_2}{2} T + N_2\right] T = 0;$$

il punto di contatto relativo alla tangente du/dv *si ottiene segando la cubica col piano della retta invariante e della tangente coniugata armonica di quella data (risp. alle tangenti asintotiche in* O).

Le generatrici di Q_1 uscenti dal punto di contatto insieme con le tangenti asintotiche in O completano il quadrilatero sghembo intersezione di Q_1 con la quadrica osculatrice in direzione du/dv, che resta così determinata.

Il piano osculatore alla curva di (*) uscente da O in direzione du/dv ha l'equazione $\xi N_1 + \eta N_2 + \zeta T = 0$ con $\xi = 2du^2dv$, $\eta = 2dudv^2$, $\zeta = \beta du^3 - \gamma dv^3 - \frac{\psi_1}{2} du^2dv + \psi_2 dudv^2$, quindi l'equazione dell'inviluppo cubico, al variare di du/dv, è

$$2\xi\eta\zeta = \beta\xi^3 - \frac{\psi_1}{2}\xi^2\eta + \psi_2\xi\eta^2 - \gamma\eta^3;$$

l'inviluppo analogo relativo ad (**), cioè alle estremali di χ_2, è

$$2\xi\eta\zeta = \beta\xi^3 - \psi_1\xi^2\eta + \frac{\psi_2}{2}\xi\eta^2 - \gamma\eta^3.$$

(1) Due superficie aventi in un punto le stesse tangenti asintotiche hanno sempre un invariante proiettivo di contatto (limite di un birapporto): se i due sviluppi in O sono $z = axy + \dots$ e $z = a'xy + \dots$, detto invariante vale a/a'.

Il piano comune ai due inviluppi ($\mp T = 0$) ha l'equazione

$$\left(\beta\psi_2^3 + \frac{3}{2}\psi_1^2\psi_2^2 + \gamma\psi_1^3\right)T - \psi_1\psi_2(\psi_2 N_1 - \psi_1 N_2) = 0$$

(quindi taglia il piano tangente lungo la tangente canonica).

Il piano contenente le rette invarianti relative a (*) e (**) è

$$\frac{3}{4}\psi_1\psi_2 T - \psi_2 N_1 + \psi_1 N_2 = 0\,;$$

quindi *il birapporto del piano tangente comune ai due inviluppi cubici, del piano tangente a* σ *in* O, *del piano contenente le due rette invarianti e del piano canonico vale*

$$-\frac{2}{3}\,\frac{\beta\psi_2^3 + \gamma\psi_1^3}{\psi_1^2\psi_2^2}\,;$$

è questo uno degli invarianti di σ *per applicabilità proiettive.*