Bollettino Unione Matematica Italiana

Giuseppe Belardinelli

Su alcuni lavori riguardanti le funzioni quasi-anallticlie del Borel

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **5** (1926), n.3, p. 147–152.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_3_147_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1926.

RELAZIONI SCIENTIFICHE

Su alcuni lavori riguardanti le funzioni quasi-analitiche del Borel.

1. Le funzioni analitiche di una variabile complessa possiedono la proprietà di essere determinate in tutto il campo di esistenza dalla conoscenza delle loro derivate successive in un punto.

E la proprietà caratteristica per le funzioni analitiche è di essere sviluppabili in serie di TAYLOR; e ciò dipende da una limitazione dei valori delle derivate successive.

Cioè, se $f(x)$ è regolare in un certo campo, si può fissare un numero k, positivo, tale che qualunque sia n, si abbia:

$$\left| \sqrt[n]{f^{(n)}(x)} \right| < kn \tag{1}$$

e viceversa, se questa disuguaglianza è verificata, in un certo campo, la funzione $f(x)$ sarà in esso regolare.

Così la disuguaglianza scritta può considerarsi come caratteristica per le funzioni analitiche.

Si deve a BOREL la scoperta di funzioni più generali delle funzioni analitiche, perchè si era creduto che le funzioni analitiche fossero le sole determinate dai loro valori e da quelli delle derivate successive in uno stesso punto.

Se poniamo le disuguaglianze:

$$\left| \sqrt[n]{f^{(n)}(x)} \right| < k\alpha_n,$$

ove i numeri α_n sono positivi non decrescenti, almeno da un certo indice in poi, si può far corrispondere ad ogni successione α_n, una classe di funzioni indefinitamente derivabili.

HOLMGREN (¹), ad esempio, per lo studio delle soluzioni dell'equazione $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, introduce la classe di funzioni ove $\alpha_n = \sqrt[n]{(2n)!}$; prolungabili in una infinità di modi.

HADAMARD (²) formulò esplicitamente il problema di determinare: sotto quali condizioni, per le α_n, le funzioni ammettono prolungamento e di vedere se le condizioni d'analiticità non siano necessarie; problema che viene chiamato problema di HADAMARD.

Il BOREL (³) ha pubblicato una serie di ricerche le quali hanno condotto alla teoria delle funzioni che egli ha chiamato funzioni quasi-analitiche e che generalizzano, nel piano della variabile complessa, la teoria di WEIERSTRASS.

2. La generalizzazione, nel campo complesso, fu trattata dal BOREL (⁴) in un nota dei « Comptes Rendus », nella quale mette in rapporto la classificazione degli insiemi di *misura nulla* con la teoria delle funzioni monogene uniformi.

Si sa come molte delle proprietà generali di funzioni definibili analiticamente si possano conservare quando si escludono gli insiemi di misura nulla. A questo proposito, una classificazione di questi insiemi di misura nulla è stata data dal BOREL mediante l'introduzione degli *insiemi regolari* che vengono da lui definiti nel seguente modo:

Sia A_1, A_2, A_3,... una infinità numerabile di punti detti *punti fondamentali*; a ciascun numero intero h si faccia corrispondere una infinità di quadrati $Q_1^{(h)}$, $Q_2^{(h)}$, $Q_3^{(h)}$,..., $Q_n^{(h)}$,... le cui aree formino una serie $\Sigma Q_n^{(h)} = \sigma_{(n)}$, convergente e tali che il quadrato $Q_n^{(h)}$ racchiuda al suo interno $Q_n^{(h+1)}$ e tenda verso A_n quando h tende all'infinito. Sia $I_{(h)}$ l'insieme dei punti interni ad uno dei quadrati $Q_n^{(h)} (n = 1, 2, ...)$; l'insieme dei punti interni a tutti i $I_h (h = 1, 2, ...)$ è un insieme, detto dal BOREL, *regolare*.

Per altre proprietà di questi insiemi regolari può vedersi il libro che a queste funzioni quasi-analitiche di variabile complessa

(¹) HOLMGREN: *Sur l'extension de la méthode d'intégration de Riemann* (Arckiv. för. Math. Astr. o Fys., 1904, p. 324). *Sur l'équation de la propagation de la chaleur* (Arckiv. för Math. Astr. o Fys. (1908).

(²) Comunicazione fatta alla Società Matem. Francese il 28 febbraio 1912

(³) A partire da una nota pubblicata nei Comptes Rendus, T. 68, 1° sem. 1894, pag. 340.

(⁴) Comptes Rendus, T. 154, 1912, pag. 1491.

ha dedicato il BOREL [5]. Potremo far notare qui che ogni insieme regolare lineare di misura nulla, i cui punti fondamentali sono densi su un segmento, ha la potenza del continuo, ed in generale che gli insiemi regolari di misura nulla, i cui punti fondamentali sono densi in un'area, ha sempre la potenza del continuo, qualunque sia la decrescenza degli intervalli di esclusione che servono a definirli.

Già nel tomo 24 dell' « Acta Mathematica » [6] il BOREL aveva trattato delle serie di funzioni razionali dimostrando l'esistenza di un prolungamento attraverso dei raggi di convergenza, che non poteva ottenersi mediante il prolungamento analitico del WEIERSTRASS. Questo però era un esempio di funzioni appositamente costruite.

Mediante l'introduzione degli insiemi regolari estende, in modo più generale, la nozione di dominio naturale di esistenza di una funzione; a quelli semplicemente connessi, che sono considerati nella teoria ordinaria delle funzioni (uniformi), ne sostituisce altri più generali come passiamo ad indicare.

Per dominio naturale di esistenza di una funzione analitica, o dominio W (WEIERSTRASS) s'intende un campo semplicemente connesso e costituito da tutti i punti interni: in questo si può con metodi noti (prolungamento analitico, integrale di CAUCHY, teorema di MITTAG-LEFFLER) rappresentare una funzione analitica. Or bene per la sua estensione del concetto di funzione monogena, il BOREL ricorre a dominii più generali nei quali egli può definire una funzione monogena, e precisamente dominii che egli indica con C (CAUCHY) ed alla cui costruzione procede nel seguente modo.

Data un'area A nel piano complesso considera in quest'area un insieme di punti A_n densi in una parte dell'area. Da ciascun punto A_n come centro descrive dei cerchi i cui raggi siano semplicemente legati ai termini della serie Σr_n, convergente e tale che

$$\sum_{p=n+1}^{\infty} r_p < \frac{r_n}{4}.$$

In ciascun A_n come centro descrive dei cerchi $S_n'^{(h)}$ di raggio $\frac{r_n}{2^h}$ e considera il campo che indica con $C'^{(h)}$ dei punti che restano, dopo l'esclusione dei punti interni a tutti i cerchi $S_n'^{(h)}$.

[5] BOREL: *Leçons sur les fonctions monogènes*, 1917.

[6] BOREL: *Sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles.* Acta Math., T. 24, (1901), pag. 309.

I dominii $C'^{(h)}$ possono non essere semplicemente connessi se i cerchi $S_n'^{(h)}$ si tagliano, allora a questi $S_n'^{(h)}$ sostituisce dei $S_n^{(h)}$ per modo da ottenere un campo $C^{(h)}$ tale che l'insieme di tutti i punti interni sia semplicemente connesso: indica poi con C l'insieme dei punti che appartengono a $C^{(h)}$ per un certo valore di h, cosicchè un punto P si dirà interno a C se per un certo valore di h_1 di h e conseguentemente per tutti i valori di $h > h_1$, P appartiene a $C^{(h}$.

L'insieme dei punti di A che non appartengono a C è un insieme regolare di misura nulla di cui i punti A_n sono i punti fondamentali e che ha la potenza del continuo ed ottenuto nel modo suddetto.

Viene definita quindi come funzione monogena nel campo C una funzione che è continua in C, che ammette in tutti i punti di C una derivata unica e continua. Queste funzioni soddisfano a molte delle condizioni essenziali delle funzioni analitiche di WEIESTRASS: ad esempio alla proprietà fondamentale che se sono nulle in un piccolo arco, sono nulle in tutto il loro campo d'esistenza.

Tratta quindi per queste funzioni un prolungamento mediante delle serie di polinomi M (MITTAG-LEFFLER).

Esempi di funzioni quasi-analitiche, oltre a quelli del BOREL, furono dati dal JULIA (7), in seguito alle belle note di WOLFF (8) sulle serie $\Sigma \frac{A_h}{x - \alpha_h}$, ed anche più recentemente, dallo stesso JULIA (9), come serie di funzioni iterate, e dall'autore di questa relazione sotto forma di serie di fattoriali generalizzate.

Si può notare che JULIA (10) ha dimostrato che il teorema di POINCARÉ-VOLTERRA per le funzioni analitiche non è valido per queste nuove funzioni; un'altra dimostrazione ne è stata data dallo scrivente (11).

3. Lo studio delle funzioni quasi-analitiche di variabile reale ha avuto in questi ultimi anni uno sviluppo assai importante per opera principalmente di DENJOY e CARLEMAN.

Il DENJOY (12), in una nota interessantissima, ha mostrato

(7) Comptes Rendus, T. 174, 1922, pag. 370.
(8) Comptes Rendus, T. 173, 1921, pag. 1056 e pag. 1327.
(9) Comptes Rendus, T. 180, 1925, pag. 1150.
(10) Comptes Rendus, T. 174, 1922, pag. 370.
(11) R. Accad. Lincei, 1922, V. 31, pag. 178 e pag. 429.
(12) Comptes Rendus, T. 173, 1921, pag. 1329.

che le funzioni di variabile reale, indefinitamente derivabili, le cui derivate successive soddisfano alle disuguaglianze

$$(2) \qquad \left| \sqrt[n]{f^{(n)}(x)} \right| < kn \log n$$

$$(3) \qquad \left| \sqrt[n]{f^{(n)}(x)} \right| < kn \log n \log_2 n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

sono classi di funzioni quasi-analitiche, che rientrano anche in quelle classi di funzioni indefinitamente derivabili che furono studiate dal GEVREY ([13]).

In particolare DENJOY ha dimostrato il seguente teorema: « Se $f(x)$ è una funzione di variabile reale definita nel segmento (a, b) ed avente delle derivate di tutti gli ordini e non soddisfacenti alla (1), e se la serie

$$\sum \frac{1}{\sqrt[n]{M_n}} = \sum \frac{1}{\alpha(n)},$$

M_n essendo il massimo di $|f^{(n)}(x)|$ sul segmento (a, b), è divergente e soddisfa a certe condizioni di regolarità, $f(x)$ è quasi-analitica ». Teorema che possiamo dire di DENJOY-CARLEMAN, in quanto il CARLEMAN ([14]) ha dimostrato detto teorema senza ammettere la regolarità di crescenza per le $\alpha(n)$, e ne ha data un'altra dimostrazione basata sulle frazioni continue di STIELTJES ([15]). Questo teorema fondamentale per le funzioni indefinitamente derivabili in un intervallo, può anche darsi sotto la forma più generale seguente:

« Sia $f(x)$ una funzione di variabile reale definita sul segmento (a, b), che sia indefinitamente derivabile e non soddisfacente alla (1) e $\sum \frac{1}{\alpha(n)}$ sia divergente: se $f(x)$ si annulla con tutte le sue derivate ai due estremi dell'intervallo, si annulla identicamente in tutto l'intervallo ».

Inoltre il CARLEMAN ([16]) ha dato recentemente una condizione necessaria e sufficiente per la quasi-analiticità.

([13]) Comptes Rendus, T. 174, 1922, pag. 368; Annales Scienthifiques des Ecoles Normales, 1918, pag. 129.

([14]) Comptes Rendus, T. 174, 1922, pag. 373.

([15]) V.° Congrès des Math. à Helsingfors, 1922.

([16]) Comptes Rendus, T. 177, 1923, pag. 422.

BOREL ha enunciato ([17]), in seguito al teorema di DENJOY-CARLEMAN, un teorema sul limite superiore della serie $\sum \frac{1}{\alpha(n)}$, teorema elegantemente dimostrato da CARLEMAN.

Si può dire che questo teorema di CARLEMAN e quello di DENJOY-CARLEMAN costituiscono le due proposizioni fondamentali per le funzioni indefinitamente derivabili in un intervallo. Recentemente BERNSTEIN ([18]), trattando del problema dell'approssimazione delle funzioni continue in tutto l'asse reale, dà pure una soluzione del problema di HADAMARD.

Riguardo alla rappresentazione analitica di queste funzioni quasi-analitiche di variabile reale, il CARLEMAN ([19]) ha pubblicato una interessante nota che, oltre a dare un notevole contributo alla teoria in discorso, fornisce un metodo di sommazione per una categoria di serie di TAYLOR a raggio di convergenza nullo.

DE LA VALLÉE-POUSSIN ([20]) dà una rappresentazione di queste funzioni mediante serie di FOURIER e dimostra come le diverse classi di funzioni quasi-analitiche possono essere caratterizzate dagli appartenenti coefficienti di FOURIER; l'autore della presente ([21]) ha mostrato, in una breve nota, che queste funzioni quasi-analitiche si possono anche rappresentare mediante funzioni quasi-periodiche del BOHR.

R. Università di Cagliari, dicembre 1925.

GIUSEPPE BELARDINELLI

([17]) Comptes Rendus, T. 174, 1922, pag. 505.

([18]) Bulletin Société Mathematique, 1924, pag. 399.

([19]) Comptes Rendus, T. 176, pag. 64. Vedasi anche BOREL: Comptes Rendus, T. 176, pag. 66.

([20]) Bulletin Société Math., 1924, pag. 196: Comptes Rendus, T. 176, 1923, pag. 635; vedasi: DE LA VALLÉE-POUSSIN: *Quatre leçons sur les fonctions quasi-analytiques de variable réelle.* Bulletin Société Math. de France, 1924.

([21]) Bollettino Unione Mat. Italiana, 1925, pag. 100.