
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIUSEPPE GHERARDELLI

**Sul genere delle curve sghembe le
cui tangenti appartengono ad un
complesso lineare**

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 5 (1926), n.3, p. 120–122.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_3_120_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_3_120_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

**Sul genere delle curve sgheembe
le cui tangenti appartengono ad un complesso lineare.**

Nota di GIUSEPPE GHERARDELLI

1. In una Memoria inserita nell'« Amer. Journ. of. Math. ⁽¹⁾ » lo STEINMETZ asserisce che ogni curva sgheмба algebrica contenuta in un complesso lineare è necessariamente razionale. Nel 2° vol. dell'opera: *Curve sgheembe speciali* del prof. G. LORIA viene, a pag. 21, riportata tale proposizione. Ma il fatto asserito non sussiste.

Il ragionamento dello STEINMETZ, riprodotto dal LORIA, è sostanzialmente il seguente:

« Sia Γ^n una curva sgheмба algebrica contenuta in un complesso lineare e si considerino due rette r, r' polari reciproche rispetto al complesso stesso. Il piano polare di un punto X di r sega Γ^n in n punti P_i , e le n rette XP_i segano r' in altrettanti punti X'_i ; questo gruppo di n punti descrive su r' (al variare di X su r) una involuzione di grado n la quale ha $2(n-1)$ punti doppi; esistono perciò $2(n-1)$ tangenti di Γ^n appoggiate ad r' , e pertanto Γ^n ha il rango $2(n-1)$ ed è quindi di genere zero ».

Sono due gli errori di questa argomentazione. Il primo sta nell'affermare che il gruppo degli n punti X'_i descriva su r' una serie lineare g'_{n-1} ; l'altro nel non tener conto delle corde principali di Γ^n (cioè delle sue corde a estremi distinti e appartenenti al complesso) appoggiate ad r e perciò anche ad r' . Nel fatto, la costruzione dello STEINMETZ pone fra i punti delle due rette r, r' una corrispondenza (n, n) nella quale sono omologhi due punti X, X' quando la loro congiungente XX' incontra Γ^n . Vi saranno per-

⁽¹⁾ C. S. STEINMETZ: *On the Curves which are self-reciprocal in a linear Nullsystem*. Am. Journ. of Math. Vol. XIV (1892), p. 161.

tanto, così su r come su r' , $2n(n-1)$ punti doppi. Indicando con p il genere di Γ^n , questi cadono:

1°) nei $\delta = n(n-1) - 3(n+p-1)$ punti di incontro di $r(r')$ con altrettante corde principali di Γ^n ;

2°) nei $k = 2(n+p-1)$ punti di incontro di $r(r')$ con altrettante tangenti di Γ^n .

Ciascuno dei primi va contato due volte, ciascuno dei secondi tre volte nel gruppo dei punti doppi. Ciò si giustifica osservando che per la rigata luogo delle rette XX' (rigata immagine della corrispondenza) le δ corde sono generatrici nodali e le k tangenti sono generatrici cuspidali. Si osservi poi che per questa rigata la Γ^n è asintotica.

2. Certamente il genere di una Γ^n contenuta in un complesso lineare non può oltrepassare un certo limite. Basta osservare che una Γ^n del genere massimo compatibile col suo ordine non può appartenere ad un complesso lineare. Infatti una tal Γ^n giace su una quadrica; e se appartenesse insieme ad un complesso lineare, sarebbe una (particolare) curva anarmonica, o curva W di KLEIN-LIE ⁽²⁾. E le curve W , se algebriche, sono razionali.

Necessariamente razionali sono le Γ^4 e le Γ^5 contenute in un complesso lineare, come ha mostrato V. SNYDER ⁽³⁾.

Ma è facile, d'altra parte, recare esempi di curve sghembe algebriche non razionali contenute in un complesso lineare.

Una rigata razionale del quarto ordine è contenuta in (almeno) un complesso lineare, e pertanto fra le sue asintotiche ve n'è una la quale, secondo un noto teorema di LIE, appartiene al complesso di cui fa parte la rigata; ora questa asintotica è, in generale, del sesto ordine ed ellittica ⁽⁴⁾.

Un altro esempio notevole è fornito dalla curva singolare per una congruenza $(2, 2)$ intersezione completa di un complesso

⁽²⁾ H. G. HALPHEN: *Sur les invariants des équations différentielles linéaires du quatrième ordre*. Acta Mathematica. Tomo 3 (1883), p. 342.

⁽³⁾ V. SNYDER: *Twisted Curves whose Tangents belong to a linear Complex*. Am. Journ. of Math. vol. XXIX (1907), p. 278. In questo lavoro viene anche esaminato il problema della determinazione del genere massimo per le curve sghembe algebriche di dato ordine contenute in un complesso lineare.

⁽⁴⁾ A. Voss: *Zur Theorie der Windschiefen Flächen*. Math. Annalen. B. VIII (1875), p. 115. In generale su una rigata razionale contenuta in un complesso lineare l'asintotica appartenente al complesso è iperellittica.

lineare e di un complesso quadratico. Questa curva è una (particolare) asintotica della superficie focale (sup. di KUMMER), appartiene al complesso lineare contenente la congruenza, ha l'ordine 8, rango 24, e perciò genere 5 ⁽⁵⁾.

3. Quanto all'esistenza di curve di genere qualunque appartenenti ad un complesso lineare, essa risulta chiaramente dalle loro equazioni parametriche (in termini finiti) assegnate sotto varie forme da PICARD ⁽⁶⁾, VESSIOT ⁽⁷⁾, DARBOUX ⁽⁸⁾...

Geometricamente essa può provarsi così. Su una rigata algebrica contenuta in una congruenza lineare speciale le ∞^1 asintotiche si distribuiscono, una ad una, pel ricordato teorema di LIE, negli ∞^1 complessi lineari del fascio avente per base quella congruenza; il loro genere uguaglia quello della rigata ⁽⁹⁾, e può quindi assumere un qualunque valore. Viceversa, ogni curva sghemba di complesso lineare, è asintotica per ∞^1 rigate siffatte ⁽¹⁰⁾.

Alla stessa conclusione si perviene, in modo semplice ed elegante, come mi fa osservare il chiarissimo prof. G. FANO, ricorrendo alla rappresentazione, dovuta al LIE, degli elementi lineari del piano sui punti dello spazio ordinario ⁽¹¹⁾. Questa rappresentazione è birazionale, e alle curve del piano fa corrispondere curve sghembe di un complesso lineare; perciò ad una curva piana algebrica di dato genere qualunque, una curva sghemba del medesimo genere contenuta in quel complesso lineare.

⁽⁵⁾ C. SEGRE: *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche*. Memorie della R. Acc. di Torino. Serie 2^a, Tomo XXXVI (1884), n. 149.

⁽⁶⁾ E. PICARD: *Application de la théorie des complexes linéaires à l'étude des surfaces et des courbes gauches*. Annales de l'École Normale Supérieure (2) 6 (1887), p. 239.

⁽⁷⁾ E. VESSIOT: *Leçons de Géométrie Supérieure*. Paris, Hermann, 1919, p. 286.

⁽⁸⁾ G. DARBOUX: *Leçons sur la théorie générale des surfaces*. II (1889), p. 99.

⁽⁹⁾ A. VOSS: loco citato, p. 110. Vedansi anche le note di Pittarelli nei « Rendiconti dei Lincei » del 1891 e del 1894.

⁽¹⁰⁾ G. KOENIGS: *Note sur les courbes dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire*. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. Tome I (1887). E. 9

⁽¹¹⁾ S. LIE: *Die Geometrie der Berührungstransformationen*. Teubner (1896), p. 238.