Bollettino Unione Matematica Italiana

UMI

Sunti di lavori esteri

* Lavori di: M. Frechet, L. M. Graves, L. Tchacaloff

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **5** (1926), n.2, p. 92–94.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_2_92_0>

SUNTI DI LAVORI ESTERI

M. FRÉCHET: *La notion de différentielle dans l'Analyse générale*, Ann. Ec. Norm. Sup., T. 41, 1925, p. 293.

L. M. GRAVES: *Le théorème de Taylor dans l'Analyse générale*, C. R., T. 180, 1925, p. 1719.

M. FRÉCHET: *Les transformations ponctuelles abstraites*, C. R., T. 180, 1925, p. 1816.

Le due Note e la Memoria, che è alla sua volta lo sviluppo di una Nota di M. FRÉCHET sotto lo stesso titolo (C. R., T. 180, 1925, p. 806) sono dedicate ad uno stesso argomento: l'estensione della nozione di differenziale e di quella di polinomio nel caso in cui la funzione ed il suo argomento siano elementi di natura qualsivoglia.

In questi tre scritti, l'estensione del concetto di differenziale non si ottiene per mezzo di una estensione della derivazione, bensì mediante una interpretazione conveniente di ciò che dà al differenziale la sua vera utilità. Il differenziale di una funzione è una espressione semplice approssimata dell'incremento della funzione. In vista di una generalizzazione del concetto nel campo dell'Analisi funzionale, HADAMARD aveva precisato che il differenziale deve essere una funzione lineare dell'incremento della variabile, e FRÉCHET aveva aggiunto che il differenziale non deve differire dall'incremento della variabile se non per un infinitesimo rispetto all'incremento della variabile. Così si trova precisato il significato dei termine: *semplice* ed *approssimato*. L'interpretazione precedente, applicata a funzioni numeriche di più variabili numeriche, conduce direttamente alla definizione di differenziale totale che è stata proposta da THOMAE, poi da STOLZ: definizione di cui W. H. YOUNG è stato il primo a dimostrare l'utilità e per cui FRÉCHET ha mostrato che la sua esistenza è perfettamente equivalente all'esistenza di un pian tangente alla superficie rappresentatrice della funzione. Questa definizione del differenziale totale è quella che è oggigiorno adottata nella massima parte dai corsi d'Analisi.

Nel caso più generale di funzionali numeriche il cui argomento è una funzione o una linea, FRÉCHET ha mostrato come l'accennata definizione conduca ad un concetto di differenziale più generale di quello di VOLTERRA.

Si tratta ora d'interpretare la definizione intuitiva sopra indicata, al caso di una funzione di natura qualunque ed in cui la variabile pure è di natura qualunque, sia $M = F(m)$. È necessario perciò di precisare in quale senso vadano intesi i termini « lineare » ed « infinitesimo rispetto a.... ».

Si darà facilmente un senso al termine *lineare* se si supponga che M ed m appartengano rispettivamente a due spazi affini astratti [1]. Si potrà, in questo caso, considerare la differenza fra il differenziale e l'incremento della funzione come un vettore ξ dello spazio in cui si muove M, e l'incremento della variabile come un vettore Δm dello spazio dove si muove m. Se si suppone che questi spazi siano spazi di BANACH e WIENER, o, con qualche maggiore generalità, spazi vettoriali (D) al senso di FRÉCHET [2], si potrà dire che ξ è infinitesimo rispetto a Δm se la *lunghezza* di ξ è infinitesima rispetto a quella di Δm. Così viene ad essere determinata dal FRÉCHET, nel primo dei tre lavori citati, la definizione di differenziale nell'Analisi generale, mentre egli ne indica alcuna delle proprietà più importanti e considera il caso dei differenziali di ordine superiore o delle funzioni di più variabili astratti.

Nella nota di GRAVES, l'A., adottando la definizione di FRÉCHET, considera il caso in cui le sue condizioni hanno luogo uniformemente in un certo dominio, ed estende poi all'Analisi generale il teorema di TAYLOR colla forma del resto data da JORDAN [3].

Infine, nella terza Nota dei C. R., l'A. considera il caso in cui M ed m appartengono agli spazi (D) affini ch'egli ha considerati come più generali degli spazi (D) vettoriali, perchè il concetto di « lunghezza » vi può essere distinto da quello di « distanza ». Egli estende in questo caso la definizione dei polinomî, che divengono ciò che egli chiama « trasformazioni di ordine intero di una variabile astratta M », e dimostra come questa definizione permetta di conservare alcune importanti proprietà dei polinomî classici.

(1) V. *Bollettino dell' Unione Matematica italiana*, T. V, p. 23, 1926.
(2) Ibid.
(3) *Cours d'Analyse*, 3ème éd., T. I, p. 251.

L. TCHACALOFF: *Sur un théorème de M. Ernesto Pascal.* Rend. R. Accad. Sc. Napoli, vol. XXXI, 1925.

— — *Sur une propriété générale des équations différentielles (un théorème de M. Ernesto Pascal).* Rend. R. Accad. dei Lincei. Serie 6ª, vol. II, 2° sem. (1925).

Riprendendo lo studio delle equazioni di RICCATI, il prof. E. PASCAL ha dimostrato recentemente (*Sulle equazioni di Riccati.* Atti della R. Accad. Sc. Napoli, oppure: « Giornale di Matematiche Battaglini », vol. LXII, 1924) che non esiste nessuna equazione del tipo

$$\frac{dy}{dx} = \sum_1^n A_k(x) \cdot f_k(y) = F(x, y) \qquad (n = 2, 3), \tag{1}$$

diversa da quella di RICCATI, dai suoi casi particolari e dalle trasformate, per la quale si abbia la proprietà che una funzione di un certo numero di integrali particolari, comunque presi, sia sempre eguale ad una costante.

Il metodo stesso tenuto dall'Autore, ed anche una sua esplicita previsione contenuta nel citato lavoro lasciano intuire che il surriferito risultato vale per un' equazione del tipo (1) con n qualunque.

Prendendo lo spunto da ciò, il sig. L. TCHACALOFF, nelle due citate note, ha dimostrato:

1°) che la supposta forma speciale del secondo membro dell' equazione (1), qualunque sia l' intero n, risulta dall'altra ipotesi: che esiste una funzione di $n+1$ variabili che diviene una costante allorchè alle variabili si sostituiscono $n+1$ integrali particolari, arbitrariamente scelti, dell' equazione differenziale medesima;

2°) che ha luogo la seguente notevole proprietà, che può considerarsi come fondamentale nella teoria delle equazioni differenziali. Data una equazione differenziale del primo ordine $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$, se esiste una funzione di $n+1$ variabili che si riduce ad una costante quando si sostituiscono alle variabili altrettanti integrali particolari comunque scelti dell' equazione, questa è lineare, o di RICCATI, o riducibile a tali tipi con una sostituzione.

La semplicità e l' eleganza di questo ultimo teorema sono così evidenti che non pare necessario spendere altre parole per illustrarlo.

Napoli, 8 febbraio 1926.

ANTONIO COLUCCI