
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMI

Sunti di lavori italiani

* Lavori di: F. Piola, M. Cipolla, G. Vacca

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 5 (1926), n.2, p. 85–91.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_2_85_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_2_85_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1926.

SUNTI DI LAVORI ITALIANI

F. PIOLA: *Fenomeni caratteristici fondamentali nell'Acustica Architettonica* (« Ingegneria », dicembre 1925).

Se una sorgente sonora emette costantemente la stessa quantità di energia per unità di tempo, l'ambiente — a prescindere da interferenze e da eccezionali condizioni cui sono dovuti l'eco ed il fenomeno del « bisbiglio » — influisce in due modi distinti e cioè: apporta un contributo alla intensità durante l'emissione e prolunga l'audizione dopo cessata quella. I due fenomeni, che vengono rispettivamente detti di *risonanza* e di *riverberazione*, sono dovuti alla riflessione e diffusione successiva delle onde sonore con parziale assorbimento ogni volta di energia da parte dei materiali alla superficie dei quali esse si compiono.

La energia E potrà considerarsi in ogni istante distribuita uniformemente nel volume V dell'ambiente ed, indicata con $I = \frac{E}{V}$ la sua densità, cioè l'intensità sonora, dovrà essere verificata l'equazione differenziale:

$$(1) \quad \frac{dI}{dt} + hI = \frac{1}{V} P$$

nella quale t è il tempo, P la potenza costante emessa dalla sorgente ed:

$$(2) \quad h = m \frac{v}{p}$$

dove m è il potere assorbente, cioè il rapporto fra l'energia riflessa o diffusa dalle pareti e quella incidente, p è il medio percorso libero di una vibrazione fra una riflessione e la successiva e v la velocità con la quale procedono le vibrazioni, cioè la velocità del suono.

In quanto a v sarà facile assegnarne il valore. Il potere assorbente m potrà essere calcolato come media pesata dei valori corrispondenti ai vari materiali od essere globalmente misurato con procedimenti indicati dall'A.

Più complessa si presenta la determinazione del libero percorso medio p , ma, prendendo in modo opportuno l'elemento di volume, si giunge, in accordo con l'esperienza, alla espressione:

$$(3) \quad p = 4 \frac{V}{S}$$

dove con S si è indicata la superficie totale interna dell'ambiente di volume V .

Integrando la (1) si ricava che, dall'istante nel quale la sorgente comincia ad emettere, la intensità va crescendo fino al valore massimo:

$$(4) \quad I_m = \frac{1}{m} \frac{p}{v} \frac{P}{V}$$

che poi rimane costante; mentre, se non vi fossero riflessioni ($m=1$), si avrebbe:

$$(5) \quad I_0 = \frac{p}{v} \frac{P}{V}$$

La risonanza adunque porta alla intensità il contributo:

$$(6) \quad I_m - I_0 = \frac{1-m}{m} \frac{p}{v} \frac{P}{V} = 4 \frac{1-m}{vm} P.$$

Cessata l'emissione, la intensità decresce fino ad annullarsi ed il tempo necessario perchè l'intensità dal valore (secondo la convenzione ordinariamente accettata) di 10 milioni di volte la « soglia » dell'audizione scenda alla soglia — tempo che vien detto di riverberazione o semplicemente *riverberazione* — si trova che è dato da:

$$(7) \quad T = k \frac{V}{mS},$$

(con k costante avente le dimensioni dell'inversa di una velocità) cioè dalla nota formola stabilita empiricamente da SABINE e che porta il suo nome. Da questa si deduce immediatamente che, volendo ottenere in ambienti geometricamente simili la stessa riverberazione, bisognerà prendere i poteri assorbenti medii proporzionali agli elementi lineari omologhi.

Nella musica e nella parola la sorgente non agisce con continuità, come finora abbiamo supposto, ma con intermittenza ed ogni emissione ha caratteristiche speciali per cui, se vogliamo udirla distintamente, occorre che non si sovrapponga alla precedente od alla seguente. Ciò è specialmente ricercato nei suoni articolati rispetto alle varie sillabe per cui sembrerebbe che la riverberazione dovesse essere assolutamente evitata. Tuttavia un

certo valore di essa — da $0'',8$ ad $1'',2$ — è giovevole all'effetto acustico.

L'assorbimento influisce sull'audizione in una sala non solo in quanto da esso dipende la risonanza e la riverberazione, ma ancora per la sua peculiare proprietà di essere selettivo. L'esperienza infatti dimostra che le onde acustiche persistenti di differente frequenza sono differentemente assorbite dai vari materiali e che però un suono composto viene alterato nel rapporto dei suoi armonici, cioè — come si dice — viene distorto. In altre parole il timbro di un suono non dipende solo dalla sorgente che lo emette ma anche dall'ambiente dove viene ascoltato.

Della selettività l'A. dà una interpretazione schematica corrispondente a considerazioni semplici, alle quali in pratica si è più o meno vicini; ed essa rende anche ragione del fatto che l'assorbimento, in alcuni materiali, come p. es. nel feltro, al variare la frequenza per spessore costante o lo spessore per la stessa frequenza, presenta dei successivi massimi e minimi.

Risulta da quanto si è esposto che un aumento dell'assorbimento (e viceversa una diminuzione) in un ambiente di fissate dimensioni, facendo diminuire tanto la risonanza quanto la riverberazione, produce i seguenti effetti:

1° diminuisce l'intensità sonora;

2° diminuisce l'alterazione del timbro cioè la distorsione dei suoni composti;

3° rende i suoni più distinti — il che è vantaggioso però solo fino a un certo limite.

Si hanno così vantaggi e danni collegati insieme e non è possibile scinderli in modo da risolvere nettamente il problema di costruire un ambiente di determinate dimensioni nel quale l'audizione sia ottima sotto tutti gli aspetti, per cui occorrerà, caso per caso, stabilire un compromesso. In ogni modo però ogni cosa potrà essere a ragion veduta prestabilita nel progetto e non sarà necessario lasciarla in balia del caso — come oggi molto frequentemente vien fatto.

M. CIPOLLA: *I sottogruppi fondamentali di un gruppo di Hölder.*

Atti della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, v. XVI5, s. 2^a, n. 6, p. 38, (1925).

(Sunto di questo e di altri precedenti lavori).

In diversi lavori, pubblicati nei Rendiconti della R. Acc. delle Scienze di Napoli (1909-1914), l'A. mise in rilievo l'importanza che per la teoria dei gruppi finiti non abeliani ha la nozione di *sottogruppo fondamentale*.

Se H è un gruppo finito non abeliano e α una sua operazione non invariante, il sottogruppo fondamentale di H , relativo ad α , è l'insieme di tutte le operazioni di H commutabili con α . Le operazioni di H (non invarianti) che ammettono lo stesso sottogruppo fondamentale, formano ciò che dicesi un *sistema fondamentale* di H .

Il numero q dei sottogruppi fondamentali di H è sempre maggiore di 2, e la differenza $q - 2$ dicesi il *tipo* di H .

Ogni sottogruppo fondamentale di H è *somma* ⁽¹⁾ del centrale J_0 (cioè del sottogruppo formato dalle operazioni invarianti di H) e di sistemi fondamentali di H . Il centrale J_r di un sottogruppo fondamentale G_r di H dicesi un *sottogruppo abeliano fondamentale* di H ; esso ha pure, come G_r , la proprietà di essere somma del centrale J_0 e di sistemi fondamentali di H .

Il gruppo H è una *combinazione lineare* ⁽²⁾ del suo centrale e dei sottogruppi abeliani fondamentali:

$$H = \Theta_0 J_0 + \Theta_1 J_1 + \dots + \Theta_q J_q,$$

dove i coefficienti Θ_r sono numeri interi relativi, legati dalla relazione

$$\Theta_0 + \Theta_1 + \dots + \Theta_q = 1.$$

Questi numeri sono pienamente determinati dal gruppo, cioè la rappresentazione di H sotto la forma indicata è possibile in un sol modo.

In virtù di tale rappresentazione, varie questioni relative ai gruppi non abeliani vengono ricondotte alle analoghe per gruppi abeliani, e l'A. diede nuove dimostrazioni di teoremi di SYLOW, di FROBENIUS e di altri, assieme a proprietà più generali o nuove.

Accanto alla nozione di tipo ha non minore importanza quella di *tipo ridotto* e di *rango*. Il massimo numero q' di sottogruppi fondamentali a due a due non coniugati del gruppo H è sempre maggiore di 1; la differenza $q' - 2$ dicesi il *tipo ridotto* di H . Un sottogruppo fondamentale di H è detto di *genere* 1 se

(¹) Se $A, B, \dots, C$ sono insiemi di operazioni di H , con $A + B + \dots + C$ (somma di $A, B, \dots, C$) s'intende denotare l'insieme che risulta aggregando agli elementi di A ogni elemento di $B, \dots, C$, con la convenzione che ciascun elemento sia considerato nella somma $A + B + \dots + C$ tante volte quante figura nei termini. Se B è contenuto in A , con $A - B$ (differenza di A e B) si denota l'insieme che risulta togliendo da A gli elementi di B .

(²) Se si usano le notazioni $2A, 3A, \dots$ per indicare le somme $A + A$, $A + A + A, \dots$, ($1A = A$, $0A$ = insieme vuoto o nullo) si comprenderà il significato di *combinazione lineare* (a coefficienti interi relativi) di insiemi di operazioni di H .

non contiene sottogruppi fondamentali di H (oltre sè stesso), di genere 2 se contiene soltanto sottogruppi di genere 1, e così via. Al massimo dei generi si dà il nome di *rango* del gruppo.

Fra il rango ρ e il tipo τ di un gruppo passa la relazione:

$$\rho \leq \frac{\tau + 2}{3}.$$

I gruppi dei primi tre tipi sono, pertanto, di rango 1. Ma è stato dimostrato da V. AMATO (Rend. Acc. di Napoli, 1918) che anche i gruppi di tipo 4, 5 e 6 sono tutti di rango 1, mentre ne esistono di tipo 7 che siano di rango 2 (ve n'è uno dell'ordine 32).

I gruppi di rango 1 hanno la particolare notevole proprietà che i loro sottogruppi fondamentali sono tutti abeliani e non contengono, oltre il centrale J_0 del gruppo, che il proprio sistema fondamentale I_r :

$$G_r = J_r = J_0 + I_r.$$

L'AMATO ha pure dimostrato che l'ordine di un gruppo di rango ρ è composto di almeno 2ρ fattori primi (non necessariamente tutti diversi), ma non può essere la potenza di grado 2ρ di un numero primo; quindi un gruppo di rango ρ è almeno dell'ordine $3 \cdot 2^{2\rho-1}$. In particolare un gruppo di rango 2 è almeno di ordine 24; e di quest'ordine ne esiste effettivamente uno solo, in astratto: esso è isomorfo al gruppo alterno delle sostituzioni su quattro elementi (tipo 11, tipo ridotto 2).

Posta su queste direttive la teoria dei gruppi finiti non abeliani, si sono presentati due diversi ordini di ricerche:

a) Determinare i gruppi dei vari ordini, che siano di tipo assegnato;

b) Determinare il tipo, il rango, ecc. dei gruppi di dato ordine (o soddisfacenti ad altre speciali condizioni).

Il CIPOLLA iniziò le ricerche dell'ordine a) col dimostrare innanzi tutto la seguente prop. fondamentale:

Fissato un numero intero positivo τ qualunque, esistono sempre infiniti gruppi del tipo τ , essi però si ripartiscono in un numero finito di classi, se si pongono nella stessa classe quei gruppi i cui aggiunti ⁽¹⁾ siano oloedricamente omorfi.

Egli dimostrò pure che i numeri primi che dividono l'ordine dei gruppi aggiunti per il tipo τ non superano $\tau + 1$, e venendo

(1) L'aggiunto di un gruppo H è il gruppo $\frac{H}{J_0}$ complementare del centrale J_0 .

quindi alla determinazione della struttura dei gruppi dei primi tre tipi ottenne i seguenti risultati:

Pei gruppi di tipo 1 esiste una sola classe, definita dal gruppo quadrimio.

Pei gruppi di tipo 2 esistono due classi: una definita dal gruppo totale delle sostituzioni su tre elementi, l'altra dal gruppo (abeliano) d'ordine 9 coll'invariante 3 doppio.

Pei gruppi di tipo 3 esistono quattro classi, definiti dai gruppi abeliani dell'8° e del 16° ordine coll'invariante 2 triplo e quadruplo rispettivamente, dal gruppo diedrale dell'8° ordine e dal gruppo tetraedrale.

La determinazione dettagliata dei gruppi di tipo 1 cui appartengono i gruppi hamiltoniani) e una classificazione ulteriore di essi è stata eseguita da G. MIGNOSI (Note e Mem. di Mat., 1922).

All'ordine b) di ricerche appartengono i lavori di V. AMATO sui gruppi non abeliani il cui ordine è la potenza p^m di un numero primo dispari p (Atti Acc. Gioenia, 1923; Note e Mem. di Mat., 1925); in questi lavori la determinazione e lo studio di questi gruppi è iniziata facendo successivamente l'ipotesi che l'aggiunto sia dell'ordine p^2 , p^3 .

Finalmente allo stesso ordine b) di ricerche appartiene la memoria, recentemente apparsa, del CIPOLLA, sui cosiddetti *gruppi di HÖLDER*, cioè sui gruppi non abeliani il cui ordine è un prodotto di numeri primi tutti diversi. Questi gruppi furono studiati da O. HÖLDER in un classico lavoro (Göttingen Nachr, 1895), nel quale è dimostrata la prop. fondamentale che ogni gruppo siffatto è generato da due operazioni, di cui una è base di un sottogruppo ciclico invariante che contiene tutti i sottogruppi ciclici invarianti del gruppo.

Lo studio dei gruppi di HÖLDER fu ripreso e continuato per altra via da A. MARONI (Rend. Circ. Mat. Palermo, 1915), cui si deve la determinazione degli ordini dei sottogruppi fondamentali e un limite inferiore del tipo. In seguito la sig.^{na} F. MASSARA (Note e Mem. di Mat., 1924) determinò i sottogruppi fondamentali e il tipo dei gruppi di HÖLDER aventi per ordine un prodotto di due o tre fattori primi, dimostrando altresì che tali gruppi sono tutti di rango 1.

Nell'odierna Memoria del CIPOLLA viene completamente risolta la questione relativa al tipo e al rango di un gruppo qualunque di HÖLDER, assieme alle altre questioni che vi si connettono, risoluzione che nei precedenti lavori appare alquanto lontana, non rivelandosi gli elementi da cui essa dipende. Tali elementi sono i cosiddetti *numeri principali* del gruppo e costi-

tuiscono una categoria speciale di divisori del numero n , rapporto dell'ordine del gruppo alla *classe* di esso (che è l'ordine del suo più ampio sottogruppo ciclico invariante).

La Memoria si occupa in primo luogo della determinazione dei numeri principali, che è collegata alla risoluzione d'interessanti questioni aritmetiche e alla nozione di *specie* del gruppo, data da HÖLDER. Il tipo del gruppo si esprime allora mediante l'integrale numerico di una semplice funzione aritmetica relativa ai numeri principali; e il rango è dato dal numero dei termini, meno uno, di una *catena di scomposizione* di n , cioè di una successione di divisori di n , da n ad 1, tale che ogni termine sia divisore principale puro massimo del precedente.

È infine eseguita la rappresentazione del gruppo mediante i sottogruppi abeliani fondamentali, rappresentazione che si dimostra essere formalmente la stessa per tutti i gruppi della medesima specie.

I risultati sono via via applicati ai tre gruppi d'ordine 210 e classe 35, due dei quali sono di rango 2 e sono precisamente i gruppi di HÖLDER d'ordine minimo di questo rango. (m. c.)

G. VACCA: *Nuova serie per la Costante di Eulero* $C=0,577\dots$ (R. C. Lincei, S. 6, T. III, p. 19, 1926).

Segnaliamo l'interessante formula data dal prof. G. VACCA

$$C = \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{Q_n} - \frac{1}{n} \right),$$

dove Q_n è il quadrato intero più prossimo ad n , cioè è il numero tale che $n^2 - u < u \leq n^2 + u$.