
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIULIO SUPINO

Sulla distribuzione delle tensioni nei sistemi elastici piani

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 5 (1926), n.2, p. 76-81.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_2_76_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_2_76_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sulla distribuzione delle tensioni nei sistemi elastici piani.

Nota di GIULIO SUPINO

1. Una ricerca sulla distribuzione delle tensioni interne — del tutto ovvia quando, per forze assegnate, si conosca la soluzione elastica — diviene assai interessante non appena si vogliano affermare proprietà delle tensioni indipendenti dalla forma del solido o dalla particolare distribuzione delle forze; sono note in questo ordine di idee le discussioni dirette a stabilire se, nella torsione di un cilindro isotropo, i massimi delle tensioni tangenziali siano al contorno e alla minima distanza dall'asse di torsione ⁽¹⁾.

Nei sistemi piani tali ricerche mi sembrano di particolare interesse in relazione all'affermarsi di metodi sperimentali di indagine; perchè, localizzando i massimi della sollecitazione, si può restringere il campo dell'esperienza. In questa Nota dimostrerò che tali massimi, per forze di massa nulle, sono sempre al contorno del solido.

2. Ricordiamo che l'espressione della tensione generica ρ , su un elemento lineare s uscente da un punto P , ha per componenti

$$(1) \quad \begin{cases} \rho_x = \sigma_x \cos \alpha + \tau \sin \alpha \\ \rho_y = \tau \cos \alpha + \sigma_y \sin \alpha \end{cases}$$

dove α è l'angolo che la normale ad s fa con l'asse x .

Se σ indica la componente di ρ agente normalmente ad s (componente normale) si ha $\sigma = \rho_x \cos \alpha + \rho_y \sin \alpha$; cioè

$$(2) \quad \sigma = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau \sin \alpha \cos \alpha.$$

Come è noto vi sono due elementi lineari, tra loro ortogonali, sui quali agiscono sole tensioni normali (tensioni principali); i loro valori si ottengono facilmente dalle (1).

(1) Da queste ricerche è risultato effettivamente che i massimi della tensione tangenziale sono al contorno del solido. Cfr. BOUSSINESQ: « J. de Math. (Liouville) », 1871, pag. 194 e seg. FILON: « London Phil. Trans. Roy. Soc. », vol. 193, (1900). Si conosce invece un esempio in cui i massimi della tensione tangenziale non sono alla minima distanza dall'asse di torsione. Cfr. E. ALLARA: « Rendiconti del Circolo mat. di Palermo », 1922.

3. Consideriamo ora l'espressione della *tensione media* agente sul punto P ; cioè la media dei valori assunti dalla ρ quando l'elemento lineare s , su cui la ρ si esercita, descrive interamente il fascio di centro P .

Ricordando che su faccie opposte la tensione tangenziale ha senso opposto, si vede subito che la *tensione media* e la *tensione normale media* hanno la stessa espressione.

Riferiamoci perciò alla (2) e cerchiamo

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma d\alpha = \sigma_m.$$

Si ha immediatamente

$$(3) \quad \sigma_m = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y).$$

Dalle relazioni tra tensioni e deformazioni si ha subito

$$\sigma_x + \sigma_y = H_1 = \frac{mE}{m-1} \theta \quad (1)$$

dove θ indica la dilatazione cubica. In assenza di forze di massa θ è una funzione armonica; quindi anche H_1 è armonica. Cioè: *I massimi ed i minimi della tensione elastica media sono al contorno del solido.*

4. Definiamo ora in P la *media dei quadrati della tensione*: ρ^2_m . Dalle (1) quadrando e sommando si ha:

$$\begin{aligned} \rho^2 = \rho^2_x + \rho^2_y = \sigma^2_x \cos^2 \alpha + \sigma^2_y \cos^2 \beta + \tau^2 + \\ + 2\tau \cos \alpha \sin \alpha (\sigma_x + \sigma_y). \end{aligned}$$

Di qui, ponendo al solito

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho^2 d\alpha = \rho^2_m,$$

segue senz'altro

$$(4) \quad \rho^2_m = \frac{1}{2} (\sigma^2_x + \sigma^2_y) + \tau^2;$$

od anche

$$\rho^2_m = \frac{1}{E} H_1^2 + (\tau^2 - \sigma_x \sigma_y).$$

(¹) Qui E indica il modulo di elasticità, m il coefficiente di Poisson. La relazione precedente è valida nei sistemi piani. Nello spazio sarebbe

$$\sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad \text{e} \quad \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{ME}{m-2} \theta.$$

Le quantità $(\sigma_m)^2$ e ρ_m^2 permettono di esprimere facilmente il lavoro di deformazione. È in P :

$$\varphi = \frac{1}{E} H_1^2 + \frac{2(m+1)}{Em} (\tau^2 - \sigma_x \sigma_y)$$

e con facile riduzione si ha

$$(5) \quad \varphi = \frac{1}{Em} [2(m+1) \rho_m^2 - 4(\sigma_m)^2];$$

espressione che ci servirà in seguito ⁽¹⁾.

5. Dimostriamo ora che i massimi di ρ_m^2 sono al contorno. Ci riferiamo perciò a coordinate polari ricordando che in questo caso le componenti di tensione dipendono da una funzione biarmonica F per mezzo delle relazioni:

$$(6) \quad \sigma_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}, \quad \sigma_t = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \tau = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right)$$

e date due funzioni p e q è

$$\Delta(p \cdot q) = p \Delta q + q \Delta p + \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha} \frac{\partial q}{\partial \alpha} \right) + 2 \left(\frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial q}{\partial r} \right).$$

Servendosi di questa espressione si ha dalla (4)

$$(7) \quad \begin{aligned} \Delta \rho_m^2 = & \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \sigma_t}{\partial \alpha} \right)^2 + \\ & + \left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma_t}{\partial r} \right)^2 + 2\tau \Delta \tau + \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial \tau}{\partial \alpha} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \tau}{\partial r} \right)^2 - (\sigma_r - \sigma_t) \Delta \sigma_r. \end{aligned}$$

Ma si possono orientare le coordinate in modo che sia $\tau = 0$ sicchè scompare il termine $\tau \cdot \Delta \tau$.

Occorre poi apprezzare l'ultimo termine del secondo membro. Fissiamo perciò il punto P e — lasciando alle coordinate quell'orientamento che annulla in P la tensione tangenziale τ — trasportiamone l'origine in un punto P' sufficientemente vicino a P . Tracciamo poi una circonferenza di centro P' che risulti tutta interna al solido e che abbia nel suo interno P . Le ten-

(1) Nello spazio si avrebbe

$$\rho_m^2 = \frac{1}{3} H^2 + \frac{2}{3} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x).$$

Il potenziale elastico si scriverebbe

$$\varphi = \frac{3}{E} \left\{ \rho_m^2 + (\sigma_m)^2 + \frac{m}{3} (\rho_m^2 - 2(\sigma_m)^2) \right\}.$$

sioni $\bar{\sigma}_r$ e $\bar{\tau}$ che si esercitano attraverso questa circonferenza sono funzioni continue e due volte derivabili (perchè la circonferenza è interna al solido e le tensioni all'interno di questo soddisfano certo a tale condizione); quindi $\bar{\sigma}_r$ e $\bar{\tau}$ si possono sviluppare in serie di FOURIER convergenti. Allora la F si può mettere sotto la forma

$$F = p_0 r^2 + a_1 r^3 \cos \alpha + b_1 r^3 \sin \alpha + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n r^{n+2} + c_n r^n) \cos n\alpha + \sum_{n=2}^{\infty} (b_n r^{n+2} + d_n r^n) \sin n\alpha \quad (1).$$

Ordinando per le potenze crescenti di r , il termine in r^n diviene

$$r^n (a_{n-2} \cos (n-2)\alpha + b_{n-2} \sin (n-2)\alpha + c_n \cos n\alpha + d_n \sin n\alpha)$$

(se $n=2$ è $a_0 + b_0 = p_0$).

Se P' è sufficientemente vicino a P il valore della (7) si ha considerando l'insieme dei termini in r di ordine più basso che compaiono nella F e sono, in P , diversi da zero.

Vediamo di apprezzare per questi il valore di $(\sigma_r - \sigma_t) \Delta \sigma_t$.

Poniamo per semplicità

$$a_{n-2} \cos (n-2)\alpha + b_{n-2} \sin (n-2)\alpha = h, \quad c_n \cos n\alpha + d_n \sin n\alpha = k.$$

(1) Infatti posta la F in questa forma si ha dalle (6):

$$\sigma_r = 2p_0 + 2a_1 r \cos \alpha + 2b_1 r \sin \alpha + \sum_{n=2}^{\infty} \{ (n+2-n^2) a_n r^n + n(1-n) c_n r^{n-2} \} \cos n\alpha + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \{ (n+2-n^2) b_n r^n + n(1-n) d_n r^{n-2} \} \sin n\alpha \\ \tau = 2a_1 r \sin \alpha - 2b_1 r \cos \alpha + \sum_{n=2}^{\infty} \{ (n+1) n a_n r^n + n(n-1) c_n r^{n-2} \} \sin n\alpha - \\ - \sum_{n=2}^{\infty} \{ (n+1) n b_n r^n + n(n-1) d_n r^{n-2} \} \cos n\alpha$$

ed è possibile, posto $r=R$ (raggio della circonferenza) di calcolare a_n e c_n ; b_n e d_n per mezzo dei valori dei coefficienti di $\cos n\alpha$, $\sin n\alpha$ nello sviluppo di FOURIER di $\bar{\sigma}_r$ e $\bar{\tau}$. La stessa cosa si può affermare per i primi termini dato che, per l'equilibrio, deve essere su R :

$$\int_0^{2\pi} \bar{\tau} dx = 0; \quad \int_0^{2\pi} \bar{\sigma}_r \cos \alpha dx = \int_0^{2\pi} \bar{\tau} \sin \alpha dx; \quad \int_0^{2\pi} \bar{\sigma}_r \sin \alpha dx = - \int_0^{2\pi} \bar{\tau} \cos \alpha dx.$$

Per maggiori particolari confronta la prima parte del mio lavoro: *Il problema elastico nella corona circolare e il calcolo degli archi*. « Nuovo Cimento », 1925, pag. 363.

È allora:

$$\begin{aligned}\sigma_r - \sigma_t &= -2r^{n-2} \{ n(n-1)k + (n-1)(n-2)h \}, \\ \Delta\sigma_t &= -4n(n-1)^2 r^{n-4} k\end{aligned}$$

e quindi

$$(\sigma_r - \sigma_t) \Delta\sigma_t = 8r^{2n-6} \{ n^2(n-1)^2 k^2 + n(n-1)^2(n-2)hk \}.$$

Cerchiamo ora in modo analogo la espressione di

$$\left(\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\sigma_t}{\partial r}\right)^2 + \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2$$

e sottraiamo da questa la precedente.

Si ha:

$$\begin{aligned}(8) \quad & \left\{ \left(\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\sigma_t}{\partial r}\right)^2 + \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2 - (\sigma_r - \sigma_t) \Delta\sigma_t \right\} r^{6-2n} = \\ & = (n-2)^2 \{ (n-1)^2 [n^2 + 2(n-2)^2] + (n^2 + 4 - 5n)^2 \} h^2 + \\ & + 4n^2(n-1)^2(n-2)^2 k^2 + 8n(n-1)^2(n-2)(n-3)h \cdot k.\end{aligned}$$

Per $n=2$ questa espressione è nulla; per $n=3$ è certo positiva poichè si riduce ad una somma di quadrati.

Per $n > 3$ scriviamo

$$\begin{aligned}(9) \quad & \{ (n-1)(n^2 - 2n - 4)h + n(n-1)(n-2)k \}^2 + \\ & + 2 \{ (n-1)(n-2)^2 h + n(n-1)(n-2)k \}^2 + \\ & + \{ (n-2)(n^2 + 4 - 5n)h + n(n-1)(n-2)k \}^2.\end{aligned}$$

La (9) è certamente positiva; sviluppandola e sottraendola dalla (8) resta

$$8(n-1) \{ (n-2) + 2(n-3) \} h^2.$$

Se si osserva che

$$\frac{\partial H_1}{\partial r} = 4(n-1)(n-2)h r^{n-3},$$

si vede che, trascurando i termini positivi della (9), rest.

$$(10) \quad \Delta\varphi_m^2 \geq \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial\sigma_r}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial\sigma_t}{\partial x}\right)^2 + 2 \left(\frac{\partial\tau}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial H_1}{\partial r}\right)^2;$$

con che è dimostrato che $\Delta\varphi_m^2$ è certamente positivo in P . Ma P è arbitrario purchè interno al solido; quindi in ogni punto interno

a questo è $\Delta \rho_m^2 \geq 0$; di qui, per un noto teorema, si ha subito che i massimi di ρ_m^2 , cioè i massimi della media dei quadrati delle tensioni agenti nell'intorno di un punto, sono al contorno.

6. Resta ancora a considerare il potenziale elastico. Riprendiamo perciò la (5)

$$(5) \quad \varphi = \frac{1}{Em} \{ 2(m+1)\rho_m^2 - 4(\sigma_m)^2 \}$$

ed osserviamo che

$$\Delta(\sigma_m)^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial H_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_1}{\partial r} \right)^2 \right\}.$$

È

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial H_1}{\partial x} \right)^2 &= \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \sigma_t}{\partial x} \right)^2 + \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial x} \frac{\partial \sigma_t}{\partial x} \right) \leq \\ &\leq \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial x} \right)^2 + \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial \sigma_t}{\partial x} \right)^2. \end{aligned}$$

Quindi

$$\Delta(\sigma_m)^2 \leq \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \sigma_t}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial H_1}{\partial r} \right)^2.$$

Confrontando questa con la (10), e ricordando che per la unicità della soluzione deve essere $m > 2$, si conclude subito dalla (5) che $\Delta \varphi \geq 0$ in ogni punto interno al solido. Quindi i massimi del lavoro di deformazione sono sul contorno del solido. E, se si accettano le ipotesi del BELTRAMI, si può anche concludere che la rottura del sistema piano, in assenza di forze di massa, ha inizio sul contorno del solido.

Bologna, novembre 1925.