Bollettino Unione Matematica Italiana

Annibale Comessatti

Sulle curve ellittiche reali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **5** (1926), n.2, p. 69–75.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_2_69_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1926.

Sulle curve ellittiche reali.

Nota di ANNIBALE COMESSATTI

Nelle mie recenti ricerche sulle varietà abeliane reali (¹), ho lasciato da parte il caso elementare delle curve ellittiche. Mi propongo di dedicarvi ora alcune osservazioni, per illustrare sopra un semplice esempio, una interessante questione generale.

Si tratta della questione seguente: Possono due simmetrie appartenenti ad una varietà abeliana V avere *diverso carattere reale* λ? (²). La risposta è negativa se V è *non singolare* (ha *indice di moltiplicabilità* nullo) giacchè allora tutte le simmetrie di V hanno lo stesso λ e quindi i corrispondenti modelli reali V_0 di V, se hanno punti reali, hanno lo stesso numero $2^{p-\lambda}$ di falde reali. Ma tal conclusione è estendibile anche ai casi singolari? (³).

Alcune considerazioni generali, di natura piuttosto complessa, mostrano che l'estensione non è lecita: ma più limpidamente soccorre l'esempio qui addotto, relativo al caso delle *curve ellittiche armoniche*, il quale, come si vedrà, conduce a modelli reali tanto con due rami ($\lambda = 0$) quanto con un ramo reale ($\lambda = 1$). E ciò in contrasto con quel che accade in tutti gli altri casi ellittici, di *tipo reale* (*equianarmonico* compreso); nei quali invece tutti i modelli reali di una stessa classe complessa, se hanno punti reali, hanno lo *stesso* numero (1 o 2) di rami reali.

Per quanto talune particolarità del caso in esame possan dedursi facilmente da note proposizioni sulle funzioni ellittiche ad *invarianti reali* (⁴), pure m'è parso ch'esso venga, e sotto

(¹) *Sulle varietà abeliane reali*, Annali di Mat. (4) 2 (1924-25), pp. 67-106, e 3 (1925-26), pp. 27-71, *Sopra certe trasformazioni dei periodi normali*, Atti Istituto Veneto 83 (1924) pp. 735-750, *Complementi al problema dei gruppi semicanonici reali*, Rend. Palermo 48 (1924), pp. 389-419.

(²) Ricordo che λ è un *è un invariante aritmetico* della *sostituzione unimodulare* prodotta dalla simmetria sui cicli d'un sistema primitivo di V. Sugli invarianti aritmetici d'una sostituzione unimodulare involutoria, e su taluni loro significati geometrici, mi propongo di ritornare in un prossimo lavoro, dove, tra l'altro, proverò che se s'indicano con a_{rs} i coefficienti della sostituzione, il valore di λ è dato dalla *caratteristica (mod. 2)* della matrice $\|a_{rs} - \varepsilon_{rs}\|$, $\varepsilon_{rs} = 0$ od 1 secondo che $r \neq s$, oppure $r = s$).

(³) Nei casi singolari da me considerati, per particolari fini, nella 2ª Memoria degli Annali (§§ 5 e 7), ho incontrato sempre simmetrie collo *stesso* carattere reale.

(⁴) Cfr. BIANCHI: *Lezioni sulla teoria delle funzioni*, ecc. (Bologna, Zanichelli), nn. 138-142.

nuovi aspetti, illustrato, se, inquadrandolo in una breve trattazione dedicata alle curve ellittiche reali, lo si esamini alla stregua dell'ordine di vedute della teoria generale; alla quale contribuisce coll'offrire un esempio di facile generalizzazione.

1. Ricorderò anzitutto, riferendoli al caso ellittico, alcuni risultati dei §§ 1, 2 della mia prima Memoria citata.

Se C è una curva ellittica *di tipo reale*, cioè contenente una *simmetria* S, si può scegliere il fattore d'indeterminazione dell'integrale di 1^a specie u, e la coppia di cicli primitivi della riemanniana, in modo che S sia rappresentata da $u' \equiv \bar{u} + c$ (potendosi inoltre, *se S ha punti uniti*, scegliere l'origine delle integrazioni in modo che sia $c = 0$) e la tabella dei periodi sia di uno dei due tipi (pseudonormali)

$$\text{(1)} \qquad a) \ \left| 1, i\tau \right|, \qquad b) \ \left| 1, \frac{1}{2} + i\tau \right|,$$

a seconda che il carattere λ di S vale 0 od 1. Il numero *reale* τ può anzi supporsi positivo [1], ed allora le tabelle (1) sono (in senso classico) *normali*; la prima *ortosimmetrica*, la seconda *diasimmetrica*.

Viceversa una curva ellittica C corrispondente ad una delle predette tabelle, contiene *quattro*, risp. *due* classi di simmetrie (distinte per trasformazioni bir. ed antibir. di C in sè) le cui equazioni si ottengono da quelle delle *rappresentanti*

$$\text{(2)} \qquad \begin{array}{ll} a) & u' \equiv \bar{u}, \quad u' \equiv -\bar{u}; \qquad u' \equiv \bar{u} + \frac{1}{2}, \quad u' \equiv -\bar{u} + i\frac{\tau}{2}, \\ b) & u' \equiv \bar{u}, \quad u' \equiv -\bar{u}; \end{array}$$

aggiungendo ai secondi membri una costante arbitraria, reale o imaginaria pura secondo che $\bar{u}$ è preceduto o no dal segno $-$.

Alle predette classi di simmetrie (che son le uniche esistenti sulle curve *prive di trasformazioni birazionali singolari in sè*) corrispondono altrettante classi di C_0 reali, distinte per trasformazioni birazionali *reali*. Se si escludono i tipi privi di punti reali, la considerazione può limitarsi, tanto nel nel caso a), quanto nel caso b), alle *due* classi corrispondenti ad $u' \equiv \bar{u}$, $u' \equiv -\bar{u}$.

Nel caso a) quelle due classi son costituite da curve con *due rami*, sui quali, se la S è $u' \equiv \bar{u}$ (caso a cui si può sempre ri-

[1] Vedi 1.ª Memoria citata [1], nota [48].

dursi) u assume rispettivamente valori del tipo

$$(3) \qquad R, \quad R + i\frac{\tau}{2},$$

R denotando un *numero reale arbitrario*; nel caso b) le due classi sono invece costituite entrambe da curve con *un ramo* sul quale u assume valori reali.

Va notato che l'origine delle integrazioni risulta sempre un punto reale di C_0, che però può sostituirsi con un altro punto reale arbitrario, senz'alterare le (1) e l'equazione di S. Naturalmente il ramo che contiene l'origine delle integrazioni è quello a cui van riferiti i valori R della (3), giacchè l'integrale u è *reale* rispetto alla simmetria S.

2. Cogliamo l'occasione per accennare, nel modo più rapido, alle *subordinazioni proiettive*.

Se il modello reale C_0 corrispondente ad una simmetria S si vuol proiettivamente concretare nel tipo d'una C^n normale di S_{n-1}, basta partirsi da una g_n^{n-1} mutata in sè da S, e riferirne proiettivamente i gruppi agl'iperpiani di S_{n-1} in guisa che all'*antiproiettività involutoria* T subordinata tra quei gruppi della S corrisponda il *coniugio* di S_{n-1}; cosa sempre possibile se T ha elementi uniti [1], quindi (come si vede subito) se ne ha la S, oppure (in ogni caso) se n è *pari*. Invece se n è dispari ed S non ha punti uniti il riferimento predetto è impossibile perchè dentro la serie non esistono gruppi uniti.

Le conseguenze proiettive di quest'ultima osservazione, sono del resto *a priori* evidenti.

Quando S ha punti uniti, ad es. è $u' = \bar{u}$, una g_n^{n-1} unita può determinarsi mediante la relativa somma abeliana U che deve risultare congrua ad uno dei valori (3) (il solo R, se si è nel caso b). Anzi, cambiando l'origine delle integrazioni (con eventuale trasporto da un ramo all'altro) si può sempre supporre $U = 0$, salvo se n è pari, nel qual caso occorre considerare anche il valore $U = i\frac{\tau}{2}$.

Stabilite queste premesse, e tenuto conto dei valori (3) spettanti ai punti reali, la deduzione delle note proprietà relative alla parità o disparità dei rami, ai più semplici problemi di contatto, in particolare ai punti stazionarî reali (flessi se $n = 3$) e

[1] Cfr. la mia Memoria: *Fondamenti per la geometria sopra le superficie razionali*, ecc., Math. Ann. **73** (1912), pp. 1-72, n. 8.

alla loro distribuzione sui rami, riducesi ad un esercizio del tutto elementare [1].

3. Veniamo ora alla questione più interessante.

Se $\bar{C}$ è una curva ellittica *armonica*, e come tabella pseudonormale relativa si assume la $|1, i|$, le quattro classi di simmetrie di carattere reale 0 corrispondenti ai tipi $a)$ non rimangon più distinte, ma si riducono a *due,* giacchè operando colla trasformazione singolare $u' = iu$, le simmetrie $u' = \bar{u}$, $u' = \bar{u} + \frac{1}{2}$ si mutano rispettivamente nelle $u' = -\bar{u}$, $u' = -\bar{u} + \frac{i}{2}$. Si ha quindi *una sola classe* di curve con due rami reali, ed *una sola classe* di curve prive di rami reali.

Inoltre dal prodotto di $u' = iu$ per $u' = \bar{u}$, nasce la simmetria S'

$$u' = i\bar{u}, \tag{4}$$

che individua una classe, la quale, nel senso che sarà meglio precisato più sotto, è *essenzialmente nuova*; nè dai prodotti analoghi nascono altre classi distinte dalle tre considerate.

Qual'è il carattere reale della simmetria (4)? Per determinarlo basta osservare che quando u s'incrementa dei periodi $1, i$, u' subisce gl'incrementi $i, 1$, e quindi che la (4) induce sui cicli C_1, C_2 a cui son relativi i periodi $1, i$, la sostituzione

$$C_1' = C_2, \quad C_2' = C_1, \tag{5}$$

il cui carattere λ, calcolato a norma della nota [2], vale 1. E ciò è confermato dal passaggio ad integrali e periodi pseudonormali, che si effettua sostituendo all'integrale u l'integrale (reale rispetto ad S') $v = \frac{1-i}{2}u$, ed ai cicli C_1, C_2 i nuovi cicli primitivi $D_1 = C_1 + C_2$, $D_2 = C_2$, giacchè allora la (4) diviene

$$v' = \bar{v}, \tag{6}$$

e la tabella dei periodi di v ai cicli D_1, D_2 è

$$\left| 1, \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right|, \tag{7}$$

[1] Che confermerebbe i risultati ottenuti, per via analoga, da HARNACK in *Ueber die Darstellung der Raumcurve vierter Ordnung*, ecc., Math. Ann. **12** (1877), pp. 47-86, e, per via topologica, da CHISINI: *Sulla forma delle quartiche gobbe* ecc., Rend. Ist. Lomb. **53** (1920), pp. 591-599.

che appartiene al tipo b). In corrispondenza alla simmetria (4) si ha dunque una terza classe di curve reali, con *un solo ramo* reale.

Dalle osservazioni esposte, risulta inoltre che la curva armonica C può considerarsi come *limite*, tanto d'una C del tipo a), quanto d'una C del tipo b); nel primo caso (periodi pseudonormali 1, i, integrale u) le due classi di simmetrie rappresentate da $u' \equiv u$, $u' \equiv u + \frac{1}{2}$ sono limiti delle quattro del caso generale (2, a) mentre la classe corrispondente ad $u' \equiv i\bar{u}$ apparisce come nuova; nel secondo caso invece (periodi 1, $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$, integrale v) i rapporti s'invertono, giacchè i le due classi del caso generale (2, b) hanno come limite quella definita da $v' \equiv \bar{v}$ (cioè da $u' \equiv i\bar{u}$), mentre acquistano carattere eccezionale le classi definite da $u' \equiv \bar{u}$, $u' \equiv \bar{u} + \frac{1}{2}$, in quanto le equazioni, in v, dei loro rappresentanti sono $v' \equiv -i\bar{v}$, $\bar{v} \equiv -i\bar{v} + \frac{1-i}{4}$.

Aggiungeremo che il *caso equianarmonico* non dà luogo a novità rilevanti, in quanto, assunta come tabella dei periodi la $|1, 1+\varepsilon|$ $\left(\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)$ [1] le simmetrie (2, b) dànno ancora luogo a due classi distinte, nelle quali rientrano anche le simmetrie ottenute dai prodotti per le trasformazioni birazionali singolari, ad es. la $u' \equiv \varepsilon\bar{u}$, ecc.

4. Le particolarità riscontrate nel caso armonico, possono variamente illustrarsi.

Ritorniamo al caso generale, ed assumiamo come modello reale corrispondente alla simmetria $u' \equiv \bar{u}$, una cubica piana (n. 2). Con una trasformazione proiettiva *reale*, questa si può mutare nella C_0

$$y^2 = f_3(x), \tag{8}$$

(f_3 polinomio di 3° grado a coeff. reali), ed allora se l'origine delle integrazioni si sceglie nel flesso improprio, l'equazione della g_2^1 segata su C_0 dalle rette $x = \text{cost}$ è $u' \equiv -u$, e il suo prodotto per il coniugio di C_0 è la simmetria $u' \equiv -\bar{u} (x' = \bar{x}, y' = -\bar{y})$ che dà luogo al modello reale C'_0

$$y^2 = -f_3(x), \tag{9}$$

complementare [2] di C_0.

[1] Si sceglie la tabella indicata, anzichè la $|1, \bar{\varepsilon}|$ perchè la parte reale del 2° periodo sia $+\frac{1}{2}$ conformemente alla (1, b).

[2] Cfr. 1ª Memoria citata [1], pag. 90.

Possono le C_0, C_0' essere equivalenti per trasformazioni birazionali *reali* (cioè le due simmetrie $u' = \bar{u}$, $u' = -\bar{u}$ appartenere alla stessa classe)? Per rispondere a questa domanda si consideri, sull'asse x, il gruppo di diramazione G della funzione y di x definita dalla (8), costituito dal punto improprio P_∞ e dai punti $f_3(x) = 0$, e si osservi, che, premessa una trasformazione ordinaria *reale* di C_0 in sè, si può supporre che la trasformazione T cercata muti uno nell'altro i due flessi impropri, e di conseguenza le due g_2^1 segate dalle rette $x = \text{cost}$; quindi subordini sull'asse x una proiettività *reale* π che deve mutare in sè il gruppo G lasciandone fisso il punto P_∞.

Ora di π siffatte v'ha *in generale* soltanto *l'identità*; e la T corrispondente ($x' = x$, $y' = iy$ oppure $x' = x$, $y' = -iy$) *non è reale.* L'unica eccezione è offerta appunto dal *caso armonico,* in cui oltre l'identità esiste una *involuzione reale* avente il comportamento indicato; ad esempio se $f_3(x) \equiv x(x^2 - 1)$ la $x' = -x$, che induce fra C_0, C'_0 le due T *reali* $x' = -x$, $y' = y$; $x' = -x$, $y' = -y$. Pertanto solo nel caso armonico, C_0, C'_0 possono appartenere ad una *stessa classe reale.*

Suppongasi ora che la (8) abbia *due rami,* cioè che le radici di $f_3 = 0$ siano tutte reali, e quindi *tutti reali* i punti di G; e sia $y^2 = \varphi_3(x)$ un'altra curva, che diremo D_0, con *un ramo,* di guisa che $\varphi_3 = 0$ abbia una sola radice reale, e il corrispondente gruppo Γ, analogo a G, due punti reali P_∞, Q e due punti A, $\bar{A}$ imaginarî conjugati. Possono le due curve C_0, D_0 appartenere alla stessa classe complessa, cioè essere birazionalmente equivalenti?

Perciò, ragionando come prima, si vede esser necessario e sufficiente che esista una proiettività (non necessariamente reale) dell'asse x la quale muti G in Γ lasciando fisso P_∞, e quindi che Γ (in ordine arbitrario) abbia, come G, *birapporto reale.* Ma posto $\beta = (P_\infty Q A \bar{A})$, sostituendo alla quaterna la sua coniugata, viene $\bar{\beta} = (P_\infty Q \bar{A} A)$, quindi $\beta\bar{\beta} = 1$; e pertanto se β è reale, sarà necessariamente $\beta = -1$.

Ciò mostra per via algebrica, come *nel solo caso armonico* si possono avere entro ad una stessa classe complessa curve reali con uno e con due rami. Tali sono ad es. le $y^2 = x(x^2 - 1)$, $y^2 = x(x^2 + 1)$ che si mutano una nell'altra colla trasformazione (complessa) $x' = ix$, $y' = \frac{1}{2}(1 + i)y$.

La stessa questione può evidentemente presentarsi anche così: Quand'è che due *matrici di Riemann* $|1, i\tau|$, $|1, \frac{1}{2} + i\sigma|$ sono *equivalenti*? Supposti, com'è lecito, τ, σ positivi, ciò val quanto chiedersi quand'è che i due punti $z=i\tau$, $z=\frac{1}{2}+i\sigma$ del piano complesso z sono equivalenti rispetto al *gruppo modulare*. E ci si persuade facilmente (ad esempio con un calcolo diretto) che ciò può accadere solo quando $\tau=1$, nel qual caso $\sigma=\frac{1}{2}$, conformemente alla (7).

Infine si può osservare che l'invariante J delle funzioni ellittiche ai periodi (1) ($\tau>0$) è *reale* e ≥ 1 nel caso a), ≤ 1 nel caso b), in quanto, considerato J come funzione del rapporto dei periodi l'argomento varia, nel primo caso, sul semiasse imaginario (positivo), nel secondo sulla semiretta (positiva) $x=\frac{1}{2}$ del piano complesso z.

Ciò risulta anche dalla nota espressione di J in funzione degl'invarianti g_2, g_3 della cubica (8) ridotta (con una proiettività reale) alla forma classica $y^2=4x^3-g_2x-g_3$. Anzi val la pena di notare che siccome si ha $\frac{g_2^3}{g_2^3}=\frac{J-1}{27J}$, così, *dato J reale*, i coefficienti g_2, g_3 son determinati (nel campo reale) a meno di fattori del tipo k^2, k^3, con k reale, e quindi è determinato il *segno del discriminante* $\Delta=g_2^3-27g_3^2$ della (8), vale a dire il numero dei relativi rami; *fatta eccezione per il caso* $J=1$ *(armonico)* in cui, essendo $g_3=0$, il segno di g_2, e quindi quello di Δ, restano indeterminati, e si possono scegliere in modo da avere tanto curve con un ramo quanto curve con due rami reali.

In conclusione, *entro la classe complessa determinata da un valore di J si hanno le seguenti classi reali*:

J >1, *quattro classi, due con due rami e due senza punti reali;*

J $=1$, *tre classi, una con due rami, una con un ramo ed una senza punti reali;*

J <1, *due classi entrambe con un ramo.*

5. Accenniamo infine ad una facile estensione.

Sulla varietà abeliana V_p corrispondente ad una matrice *composta* con p matrici $|1, i|$ (*varietà armonica* secondo Scorza), le congruenze

$$u'_i\equiv i\bar{u}_i,\quad u'_j\equiv\bar{u}_j\qquad(i=1,2,\dots,h;\ j=h+1,\dots,p)$$

rappresentano una simmetria di carattere reale h, la quale dà pertanto luogo ad un modello con 2^{p-h} falde. Variando h da 0 a p, si hanno così nella classe complessa definita da V_p, $p+1$ classi di varietà reali con $1, 2, 2^2, \dots, 2^p$ falde; ed inoltre una classe di varietà prive di punti reali, corrispondente alla simmetria $u_i'\equiv\bar{u}_i+\frac{1}{2}$ $(i=1, 2, \dots p)$.